Введение
в геометрическую теорию функций

Ф.Г. Авхадиев

Казань, 2012

Аннотация. Учебное пособие представляет собой обработанный курс лекций, прочитанный автором в 2011/2012 учебном году студентам-магистрам Казанского федерального университета по направлению "Математика".

В девяти главах изложены базовые разделы геометрической теории функций комплексного переменного. В десятой главе описаны эффективные применения теории к актуальным проблемам математической физики. Все главы содержат задачи и упражнения, отражающие пройденный материал и дальнейшее развитие теории.

Книга предназначается для студентов старших курсов и аспирантов, специализирующихся в области теории функций и математической физики. Она окажется, безусловно, полезной также физикам и инженерам, применяющим методы конформных отображений.

Илл. 19, библ. 36 названий.

Научный редактор: профессор С. Р. Насыров

Рецензенты: профессор Л. А. Аксентьев,
в. н. с., доцент И. Р. Каюмов

Рекомендовано к опубликованию и размещению на сайте Казанского (Приволжского) федерального университета Учебно-методической комиссией Института математики и механики им. Н. И. Лобачевского, протокол № 7 от 19 апреля 2012 года

Оглавление

Глава 1

О теоремах Коши, Римана, Пуанкаре и Каратеодори

1.1 Об определении аналитических функций

Это учебное пособие предназначено для студентов, уже знакомых с университетским курсом по теории функций комплексного переменного (ТФКП). В этой главе мы лишь напомним некоторые факты из этого курса.

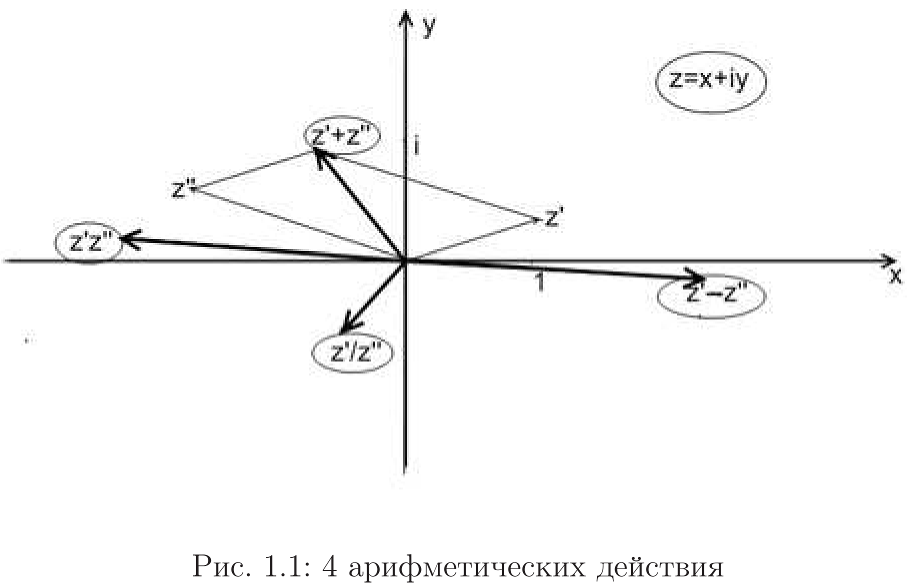

Рис. 1.1: 4 арифметических действия

Комплексные числа $z = x + iy$ отождествляются с точками плоскости, т. е. двумерного евклидова пространства $\mathbb{R}^2$ с координатами x, y. Плоскость комплексного переменного $z = x + iy$ принято обозначать через $\mathbb{C}$. Этим обозначением подчеркивается то обстоятельство, что комплексные числа образуют числовое поле, т. е. для них, следовательно, для точек на плоскости $\mathbb{C}$, определены 4 арифметических действия над числами с привычными свойствами (коммутативность операций сложения и умножения, дистрибутивность умножения относительно сложения и вычитания и др.).

Топологии (определения окрестностей точек и пределов) на плоскости комплексного переменного и двумерного евклидова пространства одинаковы. Поэтому теория функций двух вещественных переменных, в частности, понятия частных производных по переменным x, y, определения криволинейных и двойных интегралов для функций двух вещественных переменных являются составной частью комплексного анализа.

Влияние комплексного анализа в этой части минимально, но существует. Так, например, становится понятно, почему в теории функций одного вещественного переменного полудлину интервала сходимости степенного ряда называют радиусом. Кроме того, иногда формулы вещественного анализа приобретают иной, более изящный вид за счет использования комплексных переменных. Часто при этом оказываются полезными формальные производные по переменным $z = x + iy$ и $\overline{z} = x - iy$, определяемые формулами Виртингера

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Пусть Ω – область (= открытое связное множество) в $\mathbb{C}$. Рассмотрим отображения $f : \Omega \to \mathbb{C}$, иными словами, комплекснозначные функции $w = f(z)$, заданные в области Ω. По определению, производная функции $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ в фиксированной точке $z_0 \in \Omega$, задается формулой

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

если указанный предел существует. Таким образом, определение производной функции по форме совпадает с аналогичным определением производной для функции вещественного переменного. Отметим, что условия Коши-Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

в точке $z_0 = x_0 + iy_0$, вытекающие из существования комплексной производной $f'(z_0)$, равносильны соотношению (проверьте!)

$$\frac{\partial f(z_0)}{\partial \overline{z}} = 0.$$

Существенное отличие комплексного анализа от вещественного начинается с понятия аналитической (голоморфной) функции, область определения которой предполагается **открытым** множеством. И теория аналитических функций составляет основное содержание курса ТФКП.

Аналитические функции можно определить двумя равносильными способами.

Первое определение связано со степенными рядами. Говорят, что функция $f(z)$ является аналитической в точке $z_0 \in \Omega$, если существует круг $D_\rho(z_0) = \{z : |z - z_0| < \rho\} \subset \Omega$ такой, что $f(z)$ имеет в этом круге производные любого порядка и представима как сумма своего ряда Тейлора по степеням $z - z_0$, т. е.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n, \qquad z \in D_\rho(z_0).$$

Функцию $f(z)$ называют аналитической (голоморфной) в области Ω, если она является аналитической в любой точке этой области.

Можно было бы начать обсуждение аналитической функции как суммы степенного ряда в области его сходимости. Радиус сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

определяется следующей формулой Коши-Адамара

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Если $R > 0$, то степенной ряд сходится в круге $D_R(z_0) = \{z : |z - z_0| < R\}$, и легко доказать, что сумма ряда $s(z)$ является аналитической в круге $D_R(z_0)$, причем

$$a_n = \frac{s^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

Второе определение гораздо проще: говорят, что функция $f(z)$ является голоморфной (аналитической) в точке $z_0 \in \Omega$, если в этой точке существует производная $f'(z_0)$. Функцию $f(z)$ называют голоморфной (аналитической) в области Ω, если она является голоморфной (аналитической) в любой точке этой области. В последнее время "голоморфность в точке" стали заменять более удачным термином "$\mathbb{C}$-дифференцируемость в точке", что не меняет сути дела.

Понятно, что из первого определения легко следует второе, а обратная импликация оказывается нетривиальным, сложно доказываемым фактом.

Поэтому второе определение, принятое в большинстве учебников, отодвигает доказательство **характеристического свойства аналитических функций – разложимости в ряд Тейлора** – вглубь курса ТФКП. Такой подход к изложению комплексного анализа методически оправдан тем, что при доказательстве представимости рядом Тейлора $\mathbb{C}$-дифференцируемых функций развивается базовая техника теории аналитических функций, основанная на теоремах Коши.

Тем не менее, желательным кратким вариантом ответа на вопрос "Какие функции называются голоморфными или аналитическими ?" является первое определение, т. е. представимость функции в виде суммы степенного ряда в любом круге, лежащем в области определения.

1.2 Теоремы Коши

Чтобы получить справедливость первого определения при выполнении второго, сначала доказывается следующая ключевая теорема Коши.

Теорема 1.1. *Если $f(z)$ является голоморфной в области Ω в смысле второго определения, то*

$$\int_L f(z)dz = 0$$

для любого замкнутого контура L, лежащего в Ω и стягиваемого в точку непрерывными деформациями, не выводящими за пределы области Ω.

Из теоремы Коши легко выводится **интегральная формула Коши**, простейшая ее формулировка такова.

Теорема 1.2. *Пусть $f(z)$ является голоморфной в области Ω в смысле второго определения, и пусть $\overline{D}_\rho(z_0) = \{z : |z - z_0| \leq \rho\} \subset \Omega$ и $L^+_\rho(z_0)$ – окружность $\{z : |z-z_0| = \rho\}$, обходимая против часовой стрелки. Тогда для любой точки $z \in D_\rho(z_0)$ справедлива формула*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L^+_\rho(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

На основании интегральной формулы Коши легко получить справедливость первого определения аналитичности. Действительно, разложим в ряд функцию $1/(\zeta - z)$ по формуле бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем $q = (z - z_0)/(\zeta - z_0)$, $|q| < 1$,

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0}\,\frac{1}{1 - q} = \frac{1}{\zeta - z_0}\,\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}$$

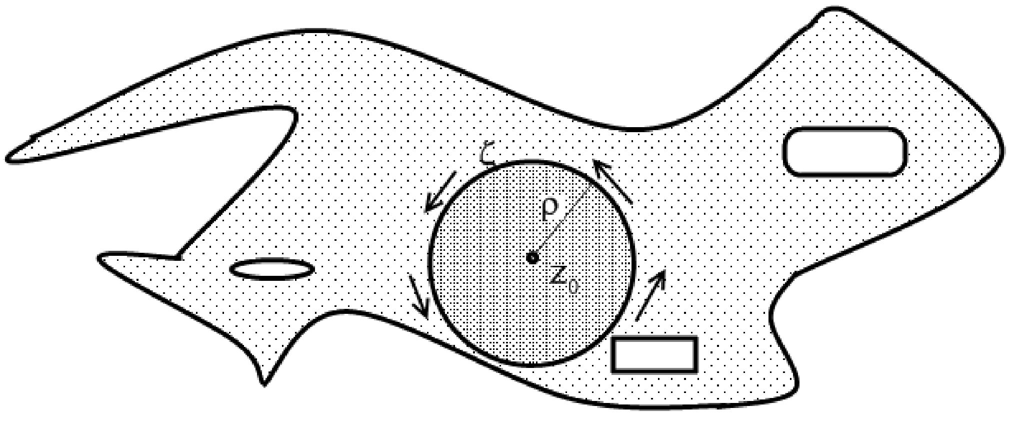

Рис. 1.2: К интегральной формуле Коши

и проинтегрируем ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\ (z - z_0)^n = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$$

почленно вдоль окружности $L_\rho^+(z_0)$. Применяя интегральную формулу Коши, получаем в круге $\{z : |z - z_0| < \rho\}$ представление функции $f(z)$ в виде суммы ряда

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

с коэффициентами, определяемыми по формулам Коши

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_\rho^+(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\ d\zeta = \frac{1}{2\pi \rho^n} \int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{i\theta}) e^{-ni\theta}\ d\theta.$$

Одновременно с этим, мы имеем и прежнее, тейлоровское выражение для коэффициентов, т. е.

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

Более общая интегральная формула Коши получается из простейшей так: круг $\overline{D}_\rho(z_0)$ заменяем на замкнутую область $\overline{G} \subset \Omega$, ограниченную конечным числом простых, замкнутых, кусочно-гладких кривых, а окружность $L_\rho^+(z_0)$ – положительно ориентированной границей этой области ∂G^+. Таким образом, получаем следующую интегральную формулу Коши:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G^+} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\ d\zeta.$$

Такая общая интегральная формула играет существенную роль при изучении ряда проблем теории аналитических функций.

Своеобразие комплексного анализа проявляется также в том, что во многих вопросах рассматривается расширенная комплексная плоскость $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, отождествляемая со сферой Римана с помощью стереографической проекции.

1.3 Конформные отображения, теоремы Римана и Пуанкаре

В настоящем курсе нашей целью является изучение основ геометрической теории функций комплексного переменного. Подготовительным материалом к геометрической теории служат следующие понятия и факты из стандартного курса ТФКП :

1) свойства дробно-линейных отображений, осуществляемых функциями вида

$$w = \frac{az+b}{cz+d} \qquad (ad - bc \neq 0),$$

а также конформные отображения, построенные с привлечением элементарных функций e^z, $\ln z$, $\sin z$, z^α и функции Жуковского $w = (z + 1/z)/2$;

2) принцип аргумента, вытекающий из теоремы Коши о вычетах, и теорема о том, что образом открытого множества при отображении аналитической функцией (не равной тождественно постоянной) является открытое множество. Кстати, из этого факта легко следует принцип максимума модуля для аналитических функций;

3) понятия римановой поверхности и аналитического продолжения.

Если функция $f(z)$ является аналитической в области Ω и $f'(z_0) \neq 0$, $z_0 \in \Omega$, то локальное поведение отображения $f : \Omega \to \mathbb{C}$ в точке $z_0 \in \Omega$ определяется первыми двумя слагаемыми ее ряда Тейлора, так как

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + O(|z - z_0|^2), \qquad a_1 = f'(z_0) \neq 0,$$

т. е. в малом функция ведет себя как линейное отображение и, в частности, углы с вершиной в точке $z_0 \in \Omega$ отображаются в углы той же величины с вершиной в точке $f(z_0) \in f(\Omega)$. В этом случае говорят, что отображение $f : \Omega \to \mathbb{C}$ является конформным в точке $z_0 \in \Omega$. Говорят, что отображение $f : \Omega \to \mathbb{C}$ является конформным и однолистным в области Ω, если оно конформно в каждой точке этой области и является инъективным отображением. Таким образом, в ТФКП для отображений открытых множеств слова "однолистный" и "инъективный" являются синонимами.

Базовым результатом геометрической теории функций является следующая теорема Римана о конформных отображениях.

Теорема 1.3. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$ – односвязная область с границей, содержащей более одной точки в $\overline{\mathbb{C}}$, $z_0 \in \Omega$ – фиксированная точка, D – единичный круг $|w| < 1$. Тогда существует однолистное конформное отображение $f : \Omega \to D$ области Ω на круг D, такое, что $f(z_0) = 0$, $f'(z_0) > 0$ (т. е. $f'(z_0)$ является вещественным положительным числом).*

Иными словами, функция $f(z)$ является аналитической в области $\Omega \subset \mathbb{C}$, и отображение $f : \Omega \to D$ является биекцией.

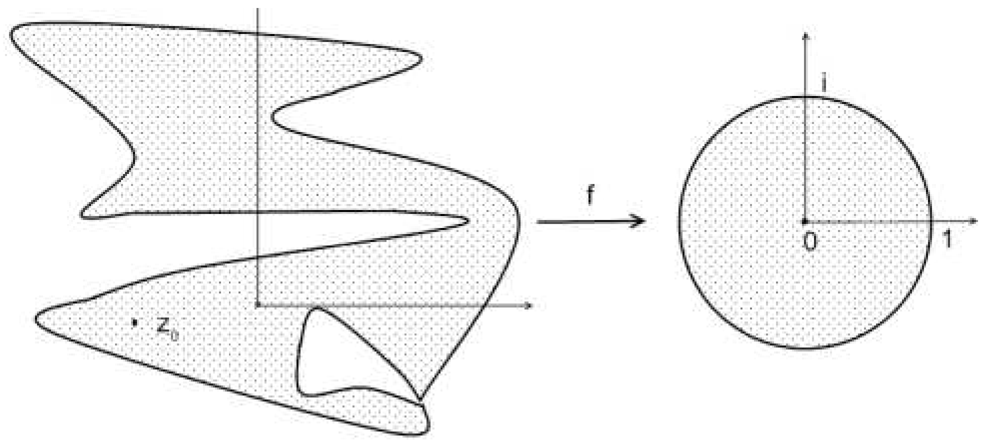

Рис. 1.3: К теореме Римана

Как простое следствие получаем, что любые две односвязные плоские области Ω_1 и Ω_2, отличные от всей плоскости, являются конформно эквивалентными, т. е. существует однолистное конформное отображение $f : \Omega_1 \to \Omega_2$, переводящее заданную точку $z_0 \in \Omega_1$ и направление в ней в заданную точку $w_0 \in \Omega_2$ и заданное направление в этой точке.

Существует ряд аналогов этой теоремы для многосвязных областей. В частности, любую двусвязную область Ω можно однолистно и конформно отобразить на кольцо вида

$$A = \{z \in \mathbb{C} : r(A) < |z| < R(A)\},$$

где $0 \le r(A) < R(A) \le \infty$. Величина

$$M(\Omega) := \frac{1}{2\pi} \ln \frac{R(A)}{r(A)},$$

называется модулем двусвязной области Ω. Если $r(A) = 0$ или $R(A) = \infty$, то полагают, что $M(\Omega) = \infty$. Две двусвязные области, имеющие не менее трех граничных точек в $\overline{\mathbb{C}}$, являются конформно эквивалентными тогда и только тогда, когда они имеют одинаковые модули. Для многосвязных областей с числом граничных компонент $m \in [3, \infty]$ характеристика m также является конформным инвариантом и совпадение числа граничных компонент, как и в случае двусвязных областей, не гарантирует конформной эквивалентности двух областей.

Эффективное обобщение теоремы Римана связано с отказом от однолистности, с так называемыми накрывающими отображениями, придуманными А. Пуанкаре и описываемыми в следующей теореме.

Теорема 1.4. *Пусть D – единичный круг $|w| < 1$, Ω – произвольная (неодносвязная) область на плоскости $\mathbb{C}$, имеющая не менее трех граничных точек в $\overline{\mathbb{C}}$, $z_0 \in \Omega$ – фиксированная точка. Тогда существует единственное конформное отображение $F : D \to \Omega$ круга D на область Ω, обладающие свойствами:*

1) $F(w)$ является аналитической функцией в круге D, $F(D) = \Omega$, и имеют место нормировки $F(0) = z_0$, $F'(0) > 0$;

2) $F'(w) \neq 0$ для любой точки $w \in D$, т. е. функция $F(w)$ локально обратима, в частности, в окрестности точки z_0 однозначно определен условием $f_0(z_0) = 0$ основной элемент f_0 обратной функции $f(z) = F^{-1}(z)$;

3) обратная функция $f(z) = F^{-1}(z)$ аналитически продолжима в Ω по любому пути, лежащему в Ω, и все значения, принимаемые ее всевозможными аналитическими продолжениями в Ω, лежат в круге D.

Замечание 1. Области, имеющие не менее трех граничных точек в $\overline{\mathbb{C}}$, часто называют областями гиперболического типа или гиперболическими областями.

Замечание 2. Теоремы Римана и Пуанкаре распространяются и на области из расширенной плоскости комплексного переменного $\overline{\mathbb{C}}$.

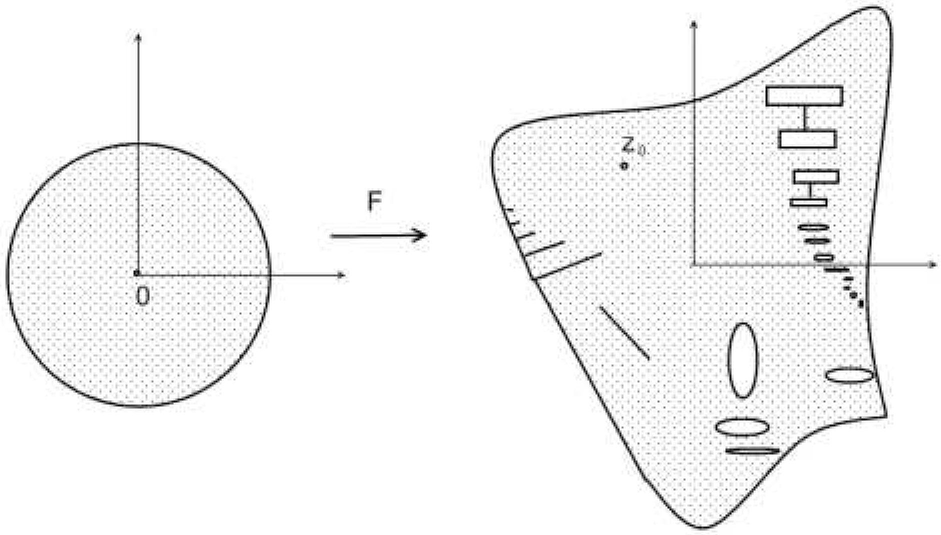

Рис. 1.4: К теореме Пуанкаре

1.4 Граничное соответствие и условия единственности

К фундаментальным теоремам геометрической теории функций комплексного переменного следует также отнести теорему Каратеодори о граничном соответствии при конформных отображениях. Для формулировки этой теоремы во всей ее полноте нужна специальная компактификация областей (так называемая теория простых концов). Она построена К. Каратеодори для геометрического описания соответствия границ при конформных отображениях областей. Здесь мы приведем лишь формулировку теоремы о граничном соответствии в простейшем случае, излагаемом в стандартных курсах по ТФКП.

Теорема 1.5. *Однолистное конформное отображение $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ двух односвязных областей, ограниченных замкнутыми жордановыми кривыми, однозначно и непрерывно продолжимо на границу области Ω_1 и порождает гомеоморфное отображение замыканий областей, и, в частности, гомеоморфизм $f : \partial\Omega_1 \to \partial\Omega_2$ границ областей.*

Как известно, единственность конформного отображения $f : D \to \Omega$ гарантируется нормировками Римана:

A) для заданных точек $z_0 \in D, \quad w_0 \in \Omega$ выполняются условия

$$f(z_0) = w_0, \;\; f'(z_0) = Ref'(z_0) > 0.$$

Пусть область ограничена замкнутой жордановой кривой. Тогда, в силу теоремы о граничном соответствии, римановы нормировки можно заменить одним из следующих нормировок B) или C), также обеспечивающих единственность конформного отображения. А именно, можно потребовать, что

B) для двух троек различных граничных точек

$$z_1, z_2, z_3 \in \partial D, \qquad w_1, w_2, w_3 \in \partial\Omega,$$

выбранных с учетом ориентации границ, выполняются равенства

$$f(z_1) = w_1, \;\; f(z_2) = w_2, \;\; f(z_3) = w_3;$$

либо

C) для пары внутренних точек $z_0 \in D$, $w_0 \in \Omega$ и пары граничных точек $z_1 \in \partial D$, $w_1 \in \partial\Omega$ выполняются равенства $f(z_0) = w_0, \;\; f(z_1) = w_1$.

Для повторения аналитической теории функций комплексного переменного я рекомендую первые 6 глав книги Е. Титчмарша [11].

Полное и вместе с тем доступное для студентов изложение теорем Римана, Пуанкаре и Каратеодори можно найти в монографии Г. М. Голузина [7].

В заключение приведем обращение предыдущей теоремы, которое иногда называют принципом соответствия границ.

Теорема 1.6. *Пусть Ω_1, Ω_2 – односвязные области, ограниченные замкнутыми жордановыми кривыми. Если функция $f(z)$ непрерывна в замыкании Ω_1, голоморфна в Ω_1, $f(\partial\Omega_1) = \partial\Omega_2$ и $f : \partial\Omega_1 \to \partial\Omega_2$ – гомеоморфизм, то $f(z)$ однолистна в области Ω_1 и конформно отображает ее на область Ω_2.*

Различные варианты и обобщения этой теоремы можно найти в обзоре [2], в книгах [1] и [34].

1.5 Задачи и упражнения

1) Объясните без вычислений: почему радиус сходимости степенного ряда

$$\frac{1}{1+z^2} = 1 - z^2 + z^4 - ... + (-1)^n z^{2n} + ...$$

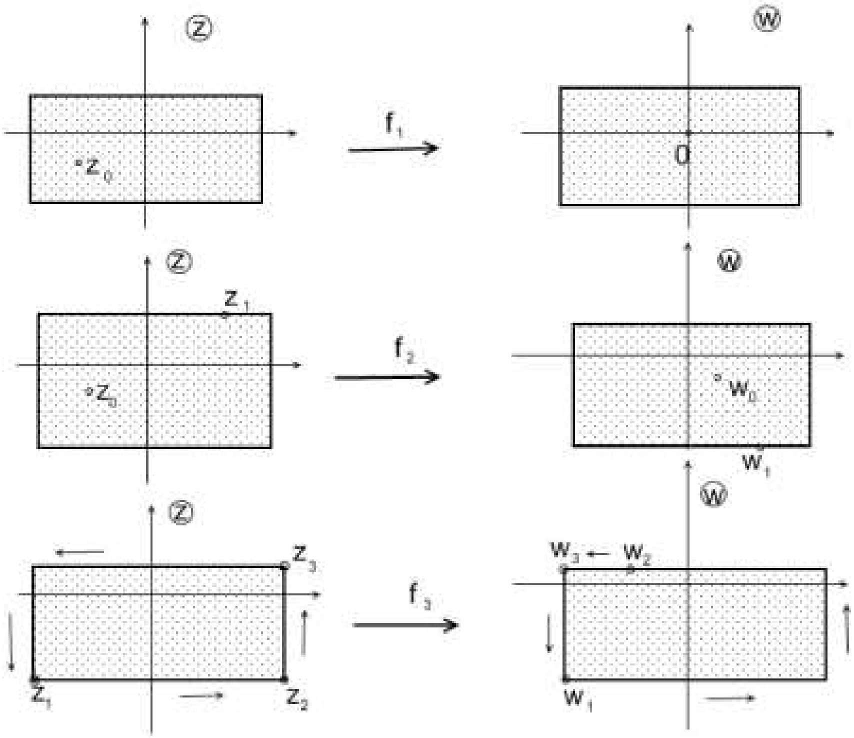

Рис. 1.5: Различные нормировки

равен единице?

2) Пусть функция $f(z)$ является аналитической в единичном круге и удовлетворяет условию: $|f(z)| \leq 1$ для любого $z \in D$. Доказать, что коэффициенты ее ряда Тейлора

$$f(z) = a_0 + a_1\, z + a_2\, z^2 + ..., \quad |z| < 1,$$

удовлетворяют для любого n неравенству

$$|a_n| \,=\, \frac{|f^{(n)}(0)|}{n!} \,\leq 1,$$

которое является точным, так как для любого натурального n и $\gamma \in \mathbb{R}$ существует экстремальная функция $f_n(z) = e^{i\gamma} z^n$, удовлетворяющая всем условиям, для которой

$$|a_n| \,=\, \frac{|f_n^{(n)}(0)|}{n!} \,= |e^{i\gamma}| = 1.$$

Указание. Воспользуйтесь формулой Коши для коэффициентов.

3) Пусть Ω – плоская область с положительно ориентированной границей $\partial\Omega$, состоящей из кусочно-гладких кривых. Рассмотрим две функции $f = f(z)$ и $g = g(z)$, определенные и непрерывно дифференцируемые в $\overline{\Omega}$ как функции двух вещественных переменных x, y $(x + iy = z \in \overline{\Omega})$. Пользуясь формулой Грина, докажите соотношения

$$\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} - \frac{\partial g}{\partial z} \right) dx\, dy = \frac{1}{2i} \int_{\partial\Omega} f\, dz + g\, d\overline{z};$$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f\, dz}{z - z_0} - \frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} \frac{dx\, dy}{z - z_0} \quad (z_0 \in \Omega).$$

4) Найдите функцию $w = f(z)$ с нормировками $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, конформно отображающую единичный круг на всю плоскость, из которой удален луч $\{w = u + iv : 1/4 \leq u < \infty,\ v = 0\}$.

Вспомните другие примеры конформных отображений из стандартного курса ТФКП и постройте однолистные конформные отображения единичного круга на следующие области: полуплоскость, четверть плоскости, внешность отрезка прямой, полоса, полуполоса, внутренности квадрата и правильного треугольника.

5) Для аналитической функции f через $\{f, z\}$ обозначим функцию, называемую производной Шварца или шварцианом и определяемую равенством

$$\{f, z\} = \frac{f'''(z)}{f'(z)} - \frac{3}{2} \left[\frac{f''(z)}{f'(z)} \right]^2.$$

5.1) Доказать, что шварциан $\{f, z\}$ инвариантен относительно дробно-линейных преобразований функции f.

Проверьте правильность приведенных ниже вычислений.

Решение. Пусть

$$g(z) = \frac{af(z) + b}{cf(z) + d}, \qquad ad - bc \neq 0,$$

требуется доказать, что $\{g, z\} = \{f, z\}$, где

$$\{g, z\} = \frac{g'''(z)}{g'(z)} - \frac{3}{2} \left[\frac{g''(z)}{g'(z)} \right]^2.$$

Непосредственными вычислениями получаем

$$g'(z) = \frac{(ad-bc)f'(z)}{(cf(z)+d)^2},$$

$$g''(z) = (ad-bc)\left[\frac{f''(z)}{(cf(z)+d)^2} - 2c\frac{(f'(z))^2}{(cf(z)+d)^3}\right],$$

$$g'''(z) = (ad-bc)\left[\frac{f'''(z)}{(cf(z)+d)^2} - 6c\frac{f''(z)f'(z)}{(cf(z)+d)^3} + 6c^2\frac{(f'(z))^3}{(cf(z)+d)^4}\right].$$

Далее, определяем отношения производных:

$$\frac{g'''(z)}{g'(z)} = \frac{f'''(z)}{f'(z)} - 6c\frac{f''(z)}{cf(z)+d} + 6c^2\frac{(f'(z))^2}{(cf(z)+d)^2},$$

$$\frac{g''(z)}{g'(z)} = \frac{f''(z)}{f'(z)} - 2c\frac{f'(z)}{cf(z)+d}.$$

Но тогда

$$\frac{3}{2}\left(\frac{g''(z)}{g'(z)}\right)^2 = \frac{3}{2}\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)^2 - 6c\frac{f''(z)}{cf(z)+d} + 6c^2\frac{(f'(z))^2}{(cf(z)+d)^2},$$

и легко получаем равенство шварцианов

$$\{g,z\} = \frac{g'''(z)}{g'(z)} - \frac{3}{2}\left(\frac{g''(z)}{g'(z)}\right)^2 = \frac{f'''(z)}{f'(z)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)^2 = \{f,z\}.$$

5.2) Упростите предыдущие вычисления, предварительно доказав следующую формулу для шварциана

$$\{f,z\} = \left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)^2.$$

Подсказка. Для вычисления шварциана $\{g,z\}$ можно воспользоваться формулой

$$\{g,z\} = (\ln g'(z))'' - \frac{1}{2}\left((\ln g'(z))'\right)^2.$$

5.3) Доказать, что шварциан $\{f,z\} \equiv 0$ тогда и только тогда, когда f является дробно-линейной функцией, т.е. $f(z)$ имеет вид

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \qquad (ad-bc \neq 0).$$

Указание. Равенство нулю шварциана для дробно-линейной функции получается легко, так как

$$\left\{\frac{az+b}{cz+d},\, z\right\} = \{z,\, z\} \equiv 0.$$

Схема доказательства обратного утверждения такова: обозначим

$$p(z) = \frac{f''(z)}{f'(z)}.$$

Как мы убедились в упражнении 5.2)

$$\{f, z\} = p'(z) - \frac{1}{2}\,p^2(z).$$

Поэтому решение нелинейного уравнения $\{f, z\} = 0$ третьего порядка сводится к последовательному решению трех следующих дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{p'}{p^2} = \frac{1}{2}, \quad (\ln f')' = \frac{1}{-z/2 + C_1}, \quad f' = \frac{C_2}{(z - 2C_1)^2},$$

где C_1 и C_2 – постоянные.

6) Пусть f – одно из однолистных конформных отображений единичного круга на область Ω. Докажите, что любое другое однолистное конформное отображение $g : D \to \Omega$ может быть представлено формулой

$$g(\zeta) = f\left(e^{i\alpha}\frac{\zeta - a}{1 - \overline{a}\zeta}\right), \quad \zeta \in D,$$

где a и α – постоянные, причем $|a| < 1$, а α – вещественная величина.

7) Пусть f – одно из накрывающих конформных отображений единичного круга на гиперболическую область Ω. Докажите, что любое другое накрывающее конформное отображение $g : D \to \Omega$ может быть представлено формулой

$$g(\zeta) = f\left(e^{i\alpha}\frac{\zeta - a}{1 - \overline{a}\zeta}\right), \quad \zeta \in D,$$

где a и α – постоянные, причем $|a| < 1$, а α – вещественная величина.

Глава 2

Метрика Пуанкаре и принцип гиперболической метрики

2.1 О моделях геометрии Лобачевского

Как известно, формально геометрия Лобачевского строится на тех же аксиомах, что и геометрия Евклида, но с заменой одной из аксиом, а именно, аксиомы о параллельных, на новую:

на плоскости через точку, взятую вне заданной прямой, можно провести не менее двух прямых, не пересекающих заданную.

Изменение всего лишь одной аксиомы (пятого постулата геометрии Евклида) приводит к совершенно новой планиметрии. В частности, оказывается, что для суммы углов любого треугольника выполняется неравенство $\alpha + \beta + \gamma < 180°$. Появляются новые формулы для всех метрических величин, в частности, новые формулы для вычисления площадей фигур, длин дуг и т. п. Для бесконечно малых фигур (т. е. асимптотически) новые формулы совпадают со старыми, в частности, для треугольников малых размеров $\alpha + \beta + \gamma \approx 180°$.

Н. И. Лобачевский надеялся, что в истинности его геометрии можно убедиться на основе изучения свойств геометрических фигур больших размеров путем астрономических наблюдений. Но такая программа не реализована до сих пор. Практическая значимость геометрии Лобачевского была установлена иным путем, на моделях.

Первая интерпретация принадлежит Е. Бельтрами (1868 год), а именно, им была найдена поверхность, на которой реализуется геометрия Лобачевского, если отрезками прямых на этой поверхности считать геодезические линии (вспомним, что так называют линии, соединяющие кратчайшим путем две точки на поверхности).

Единообразную интерпретацию трех геометрий (Евклида, Лобачевского и геометрии на сфере) представил в 1871 году Ф. Клейн. По предложению Клейна геометрию Лобачевского называют гиперболической геометрией.

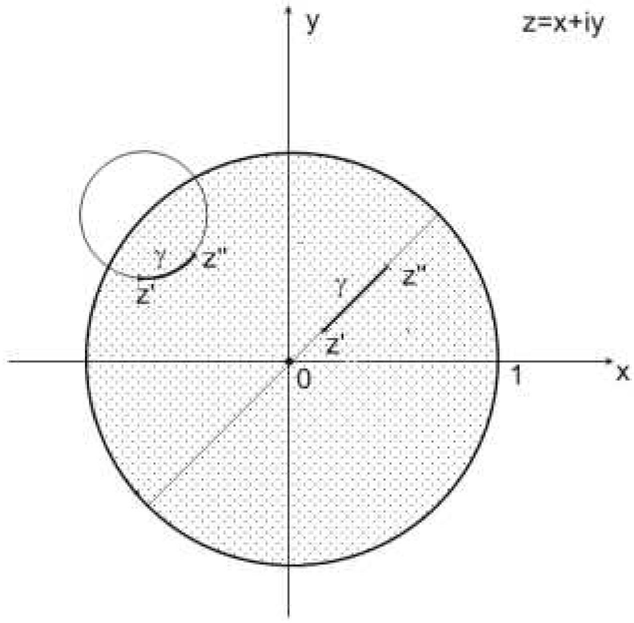

Рис. 2.1: Модель Пуанкаре

В 1882 году А. Пуанкаре предложил новую модель плоскости Лобачевского, тесно связанную с ТФКП и группами дробно-линейных отображений.

Согласно модели Пуанкаре, плоскостью Лобачевского объявляется единичный круг $D = \{z : |z| < 1\}$. Роль точек играют точки, а роль прямых – диаметры круга D и лежащие в круге D дуги окружностей вида $|z - z_0| = \rho$ ($|z_0| > 1$), ортогональных к единичной окружности $|z| = 1$. Пуанкаре доказал, что эти дуги являются геодезическими линиями, если дифференциальный элемент длины дуги определять по формуле

$$d\sigma = \frac{|dz|}{1 - |z|^2}.$$

А именно, среди всех линий $\gamma(z_1, z_2)$, лежащих в круге D и соединяющих заданные точки $z_1,\ z_2$ из круга D, инфимум в равенстве

$$l(z_1, z_2) = \inf_{\gamma(z_1,z_2)} \int\limits_{\gamma} \frac{|dz|}{1-|z|^2},$$

реализуется на кривой $\gamma(z_1, z_2)$, которая является либо отрезком диаметра, либо дугой окружности, ортогональной к окружности $|z| = 1$.

2.2 Конформная инвариантность метрики Пуанкаре

Теорема 2.1. *Метрика Пуанкаре является конформно инвариантной.*

Доказательство. Пусть T – конформное отображение круга $|\zeta| < 1$ на круг $|z| < 1$. Конформная инвариантность метрики Пуанкаре означает, что должно иметь место тождество

$$\frac{|dz|}{1-|z|^2} = \frac{|d\zeta|}{1-|\zeta|^2}$$

для всех точек z, ζ единичного круга, связанных равенством $z = T(\zeta)$.

Из общего курса ТФКП известно, что любой конформный автоморфизм T единичного круга определяется формулой

$$z = T(\zeta) = e^{i\alpha}\frac{\zeta - a}{1-\overline{a}\zeta} \quad \alpha \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{C}, |a| < 1.$$

Непосредственными вычислениями получаем

$$T'(\zeta) = e^{i\alpha}\frac{1-|a|^2}{(1-\overline{a}\zeta)^2},$$

$$1 - |T(\zeta)|^2 = \frac{|1-\overline{a}\zeta|^2 - |\zeta - a|^2}{|1-\overline{a}\zeta|^2} =$$

$$= \frac{1 + |a|^2|\zeta|^2 - |\zeta|^2 - |a|^2}{|1-\overline{a}\zeta|^2} = \frac{(1-|a|^2)(1-|\zeta|^2)}{|1-\overline{a}\zeta|^2},$$

и, следовательно,

$$|T'(\zeta)| = \frac{1-|T(\zeta)|^2}{1-|\zeta|^2}.$$

Таким образом, приходим к требуемому соотношению

$$\left|\frac{dz}{d\zeta}\right| = \frac{1-|z|^2}{1-|\zeta|^2},$$

этим и завершается доказательство.

Теорема 2.2. *Гиперболическое расстояние* $\rho_D(z_1, z_2)$ *между точками* $z_1,\ z_2 \in D$ *определяется формулой*

$$\rho_D(z_1, z_2) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+t}{1-t}, \quad t = \left|\frac{z_1 - z_2}{1-\overline{z}_1\, z_2}\right|.$$

Действительно, преобразование

$$w = T(z) = e^{i\alpha}\frac{z - z_1}{1-\overline{z}_1\, z}$$

и конформная инвариантность метрики дают равенство $\rho_D(z_1, z_2) = \rho_D(0, t)$. А величина $\rho_D(0, t)$ легко вычисляется:

$$\rho_D(0, t) = \int_0^t \frac{d\,r}{1-r^2} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+t}{1-t}.$$

Метрику Пуанкаре можно определить в любой односвязной области $\Omega \subset \mathbb{C}$**,** $\Omega \neq \mathbb{C}$. Для этого рассмотрим однолистное конформное отображение $F : D \to \Omega$. Через $w = F(z)$ обозначим соответствующую голоморфную функцию со значениями в области Ω.

Область Ω превратим в плоскость Лобачевского, определив в ней коэффициент метрики Пуанкаре $\lambda_\Omega(w)$ равенством

$$\lambda_\Omega(w)|dw| = \lambda_D(z)|dz| \qquad \forall z \in D,\ w = F(z) \in \Omega.$$

Имеем

$$\lambda_\Omega(F(z))\ |F'(z)| = \frac{1}{1-|z|^2} \qquad \forall z \in D,$$

тогда

$$\lambda_\Omega(w) = \frac{|F'(F^{-1}(w))|^{-1}}{1-|F^{-1}(w)|^2}\ \ \forall w \in \Omega.$$

Теми же формулами определяется и метрика Пуанкаре (т. е. гиперболическая метрика) для многосвязной области $\Omega \subset \mathbb{C}$, граница которой содержит не менее трех точек в $\overline{\mathbb{C}}$. В этом случае $F : D \to \Omega$ – накрывающее отображение из теоремы Пуанкаре о конформных отображениях. Теперь становится понятен термин "область гиперболического типа" применительно к областям, имеющим не менее трех граничных точек в расширенной комплексной плоскости.

Таким образом, в каждой области $\Omega \subset \mathbb{C}$, граница которой содержит не менее трех точек в $\overline{\mathbb{C}}$, мы можем определять геометрические характеристики, связанные либо с геометрией Евклида, либо с геометрией Лобачевского. Многие результаты в геометрической теории функций комплексного переменного можно интерпретировать как теоремы сравнения евклидовых и гиперболических характеристик одной и той же области.

2.3 Лемма Шварца и принцип гиперболической метрики

Рассмотрим принцип гиперболической метрики, взяв для простоты лишь случай односвязных областей. Пусть Ω_1 и Ω_2 – односвязные области на плоскости, не совпадающие со всей плоскостью $\mathbb{C}$.

Через $F : \Omega_1 \to \Omega_2$ обозначим однолистное конформное отображение Ω_1 на Ω_2. По определению метрики Пуанкаре имеем тождество

$$\lambda_{\Omega_1}(z)|dz| = \lambda_{\Omega_2}(w)|dw|, \quad w = F(z), z \in \Omega_1.$$

Следовательно,

$$|F'(z)| \equiv \frac{\lambda_{\Omega_1}(z)}{\lambda_{\Omega_2}(w)}.$$

Теорема 2.3. (Принцип гиперболической метрики.) *Пусть $w = f(z)$ – голоморфная функция, определенная в области Ω_1 и удовлетворяющая условию $f(\Omega_1) \subset \Omega_2$. Тогда*

$$|f'(z)| \leq \frac{\lambda_{\Omega_1}(z)}{\lambda_{\Omega_2}(f(z))}, \quad z \in \Omega_1.$$

Равенство в этом неравенстве имеет место тогда и только тогда, когда f – однолистное конформное отображение Ω_1 на Ω_2.

Из этой теоремы следует, что при голоморфном отображении одной области в другую неевклидовы длины и неевклидовы площади будут только уменьшаться за исключением случая, когда эта функция осуществляет однолистное конформное отображение области определения функции на область ее значений.

Для доказательства нам потребуется известная из общего курса ТФКП

Лемма 2.1. (Лемма Шварца.) *Пусть* $w = \varphi(z)$ *голоморфна в круге* $|z| < 1$ *и удовлетворяет условиям:* $\varphi(0) = 0$ *и* $|\varphi(z)| \leq 1, \quad |z| < 1$. *Тогда*

1) $|\varphi(z)| \leq |z|, \quad 0 < |z| < 1,$

2) $|\varphi'(0)| \leq 1$.

Равенство в этих неравенствах имеет место тогда и только тогда, когда $\varphi(z) = e^{i\alpha}z, \alpha$ *– вещественное число.*

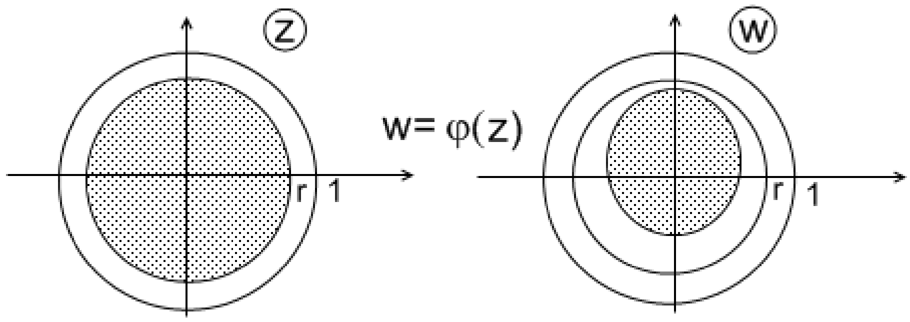

Рис. 2.2: К лемме Шварца

Доказательство принципа гиперболической метрики. Рассмотрим произвольную точку $z_0 \in \Omega_1$ и зафиксируем ее, и пусть $w_0 = f(z_0)$. По теореме Римана о конформных отображениях существует однолистное конформное отображение $F : \Omega_1 \to \Omega_2$, удовлетворяющее условию $F(z_0) = w_0$. Рассмотрим также однолистное конформное отображение $g : D \to \Omega_1$, $g(0) = z_0$.

Введем еще одну вспомогательную функцию

$$\varphi(\zeta) = g^{-1}(F^{-1}(f(g(\zeta)))), \varphi(0) = 0.$$

По лемме Шварца имеем точную оценку $|\varphi'(0)| \leq 1$. Поскольку имеют место формулы $f(g(\zeta)) = F(g(\varphi(\zeta)))$ и

$$f'(z)g'(z) = F'(g(\varphi(\zeta)))g'(\varphi(\zeta))\varphi'(\zeta),$$

то в точке $\zeta = 0$ получаем равенство

$$f'(z_0)g'(0) = F'(z_0)g'(0)\varphi'(0).$$

Так как $g'(0) \neq 0$, то последнее соотношение вместе с неравенством $|\varphi'(0)| \leq 1$ приводят к требуемой оценке

$$|f'(z_0)| \leq |F'(z_0)| = \frac{\lambda_{\Omega_1}(z_0)}{\lambda_{\Omega_2}(w_0)} = \frac{\lambda_{\Omega_1}(z_0)}{\lambda_{\Omega_2}(f(z_0))}.$$

В случае равенства по лемме Шварца имеем $\varphi(\zeta) = e^{i\alpha}\zeta$, что равносильно равенству $f(g(\zeta)) \equiv F(g(e^{i\alpha}\zeta))$. Следовательно, в случае равенства имеем: $f(z) = F(\psi(z))$, где $\psi(z) = g(e^{i\alpha}g^{-1}(z))$ – конформный автоморфизм Ω_1. Таким образом, функция $f(z)$ определяет одно из однолистных конформных отображений Ω_1 на Ω_2.

Этим и завершается доказательство.

Отметим, что эта теорема остается справедливой для произвольных гиперболических областей (т. е. для областей Ω_1 и Ω_2 на расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$, имеющих не менее трех граничных точек) с естественной оговоркой: экстремальным является накрывающее конформное отображение Ω_1 на Ω_2.

Пусть $\lambda_\Omega(z)$ – коэффициент метрики Пуанкаре для гиперболической области. Величина

$$\frac{1}{\lambda_\Omega(z)}$$

называется гиперболическим радиусом области Ω в точке z. Если Ω – односвязная область, не содержащая бесконечно удаленной точки, то величина $R_\Omega(z) = \lambda_\Omega^{-1}(z)$ называется конформным радиусом. Например, для единичного круга $D = \{z : |z| < 1\}$ конформный радиус определяется равенством $R_D(z) = 1 - |z|^2$.

Следует привести общепринятое определение конформного радиуса. *Пусть Ω – односвязная область на плоскости, не совпадающая со всей плоскостью $\mathbb{C}$, и z_0 – фиксированная точка этой области. В силу теоремы Римана существует положительное число R и однолистное конформное отображение $f : \Omega \to D_R = \{z : |z| < R\}$, нормированное условиями*

$$f(z_0) = 0, \;\; f'(z_0) = 1.$$

Именно это число R и называется конформным радиусом Ω в точке z_0. Убедитесь в том, что определенное таким образом положительное число R совпадает с величиной $\lambda_\Omega^{-1}(z_0)$.

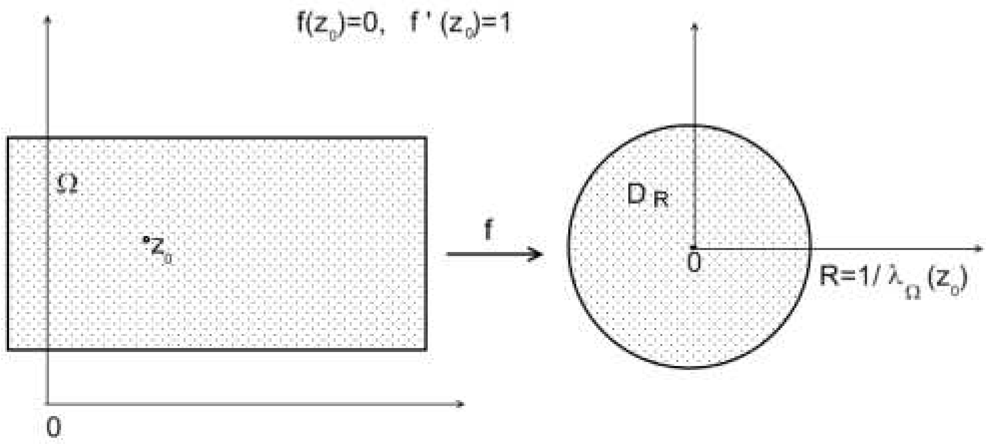

Рис. 2.3: Конформный радиус

2.4 Задачи и упражнения

1) Докажите неравенство Шварца-Пика: если функция $z = \varphi(\zeta)$ является аналитической в единичном круге и $|\varphi(\zeta)| < 1$, $\zeta \in D$, то

$$|\varphi'(\zeta)| \le \frac{1 - |\varphi(\zeta)|^2}{1 - |\zeta|^2}, \quad |\zeta| < 1.$$

Равенство имеет место тогда и только тогда, когда функция имеет вид $z = \varphi(\zeta) = e^{i\alpha}(\zeta - a)/(1 - \overline{a}\zeta)$, где α – вещественное число, $a \in D$.

2) Найдите явные формулы для конформного радиуса и сформулируйте принцип гиперболической метрики в случае, когда

a) область $\Pi = \{z = x + iy : y > 0\}$ – верхняя полуплоскость;

b) область $G = \{z = x + iy : -\pi/2 < x < \pi/2\}$ – полоса.

Указание. Для конформных радиусов должны быть получены формулы: $R_\Pi(x + iy) = 2y$ и $R_G(x + iy) = 2\cos x$.

3) Покажите, что коэффициент метрики Пуанкаре для двусвязной области $D' = \{z = x + iy : 0 < |z| < 1\}$ (т.е. для единичного круга с выколотым центром) определяется формулой

$$\frac{1}{\lambda_{D'}(z)} = 2\,|z|\,\ln\frac{1}{|z|}.$$

4) Докажите следующий принцип монотоннности для коэффициента гиперболической метрики: если $\Omega' \subset \Omega$, то $\lambda_{\Omega'}(z_0) \geq \lambda_\Omega(z_0)$ для любой точки $z_0 \in \Omega'$.

Указание. Рассмотрите накрывающие конформные отображения $f : D \to \Omega'$ и $F : D \to \Omega$, удовлетворяющие условию $f(0) = F(0) = z_0$. Тогда

$$\lambda_\Omega(z_0)|F'(0)| = \lambda_{\Omega'}(z_0)|f'(0)| = \lambda_D(0) = 1.$$

Остается сравнить модули производных в начале координат с привлечением леммы Шварца к функции $\varphi(\zeta) := F^{-1}(f(\zeta))$, однозначная ветвь которой выделена условием $\varphi(0) = 0$.

5) Покажите, что конформный радиус $R = R(x, y) = R_\Omega(x + iy)$ как функция двух вещественных переменных x и y удовлетворяет следующему уравнению Лиувилля

$$R\,\Delta R = |\nabla R|^2 - 4,$$

где использованы стандартные обозначения для оператора Лапласа и градиента функции:

$$\Delta R = \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial y^2}, \quad \nabla R = \left(\frac{\partial R}{\partial x},\, \frac{\partial R}{\partial y}\right), \quad |\nabla R| = \sqrt{\left(\frac{\partial R}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial y}\right)^2}.$$

6) Покажите, что с использованием формальных производных по переменным $z = x + iy$ и $\overline{z} = x - iy$, определяемых формулами Виртингера, оператор Лапласа выражается формулой

$$\Delta R = 4\,\frac{\partial^2 R}{\partial z\,\partial \overline{z}},$$

а уравнение Лиувилля можно представить в следующем виде

$$R\,\frac{\partial^2 R}{\partial z\,\partial \overline{z}} = \left|\frac{\partial R}{\partial \overline{z}}\right|^2 - 1.$$

7) Знаменитая гипотеза Кшижа (J. G. Krzyż): если функция $f(z)$ является аналитической в единичном круге и удовлетворяет условию $0 < |f(z)| \leq 1$ для любого $z \in D$, то для коэффициентов ее ряда Тейлора

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, z^n, \quad |z| < 1,$$

справедлива точная оценка

$$|a_n| \leq \frac{2}{e} \qquad (n \geq 1).$$

Докажите ее при $n = 1$.

Комментарии. Гипотеза Кшижа доказана при $n = 1$ самим Кшижем, при $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$ и $n = 5$ другими математиками. При $n \geq 6$ к настоящему времени нет ни доказательства, ни опровержения, т. е. проблема остается открытой.

Отметим, что гипотеза Кшижа является общеизвестной, и специалисты по геометрической теории функций считают ее весьма трудной проблемой. Например, по мнению профессора Штефана Рушевея, гипотеза Кшижа намного сложнее и глубже, чем знаменитая (уже решенная) проблема Бибербаха об оценках тейлоровских коэффициентов функций, однолистных в единичном круге. Но, как всегда, не исключено, что кто-то найдет простое, оригинальное решение проблемы.

Некоторые подробности и ссылки на статьи, посвященные проблеме Кшижа и родственным вопросам, можно найти в последней главе книги [20].

Глава 3

Изопериметрическое неравенство и теоремы площадей

3.1 Классическое изопериметрическое неравенство

Среди всех фигур с заданным периметром наибольшую площадь имеет круг. Этот факт был известен еще в древней Греции, хотя строгие доказательства появились лишь в конце девятнадцатого и в начале двадцатого столетий.

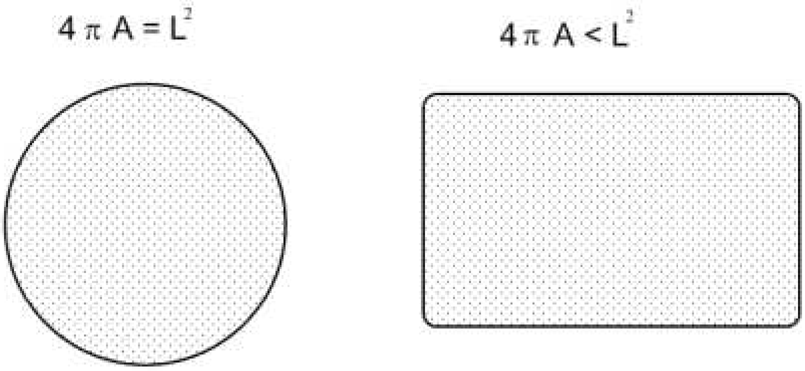

Рис. 3.1: Сравнение площади с длиной границы

Запишем это утверждение на языке современных формул и приведем одно из более чем десяти известных доказательств.

Теорема 3.1. (Классическое изопериметрическое неравенство.) *Пусть* Ω – *односвязная область на плоскости со спрямляемой границей длины* $L = L(\partial\Omega)$*, и пусть* $A = A(\Omega)$ – *площадь области* Ω*. Тогда*

$$A \le \frac{L^2}{4\pi}.$$

Равенство достигается тогда и только тогда, когда Ω – *круг.*

Доказательство (А. Гурвиц). Пусть s – дуговая абсцисса граничной кривой, по условию теоремы $0 \le s \le L$. Запишем параметрические уравнения этой кривой в виде $z = x + iy = \varphi(s) + i\psi(s)$ и введем вспомогательную переменную $t = 2\pi s/L, \quad 0 \le t \le 2\pi$. Имеем $z = \varphi(s) + i\psi(s) = x(t) + iy(t), \quad t \in [0, 2\pi]$. Из курса математического анализа известно, что спрямляемость кривой влечет абсолютную непрерывность функций φ и ψ, т. е. существование почти всюду производных φ', ψ' и справедливость равенств

$$\varphi(s) = C_1 + \int\limits_0^s \varphi'(\tau)d\tau, \qquad \psi(s) = C_2 + \int\limits_0^s \psi'(\tau)d\tau.$$

Поэтому функции $x = \varphi$ и $y = \psi$ можно разложить в абсолютно сходящиеся ряды Фурье

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt,$$

$$y(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos nt + d_n \sin nt.$$

Законность применяемых ниже операций почленного дифференцирования и интегрирования рядов легко обосновать для приближающих рядов с коэффициентами $r^n a_n$, $r^n b_n$, $r^n c_n$, $r^n d_n$ $(0 < r < 1)$ с последующим предельным переходом при $r \to 1$ после вывода формул для длины и площади.

Вычислим сначала площадь области по известной формуле

$$\int\limits_{\partial\Omega} x dy = \int\limits_0^{2\pi} x(t)y'(t)dt =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} -c_n n \sin nt + d_n n \cos nt\right) dt =$$

$$= \pi \sum_{n=1}^{\infty} n(a_n d_n - b_n c_n).$$

Таким образом, площадь области Ω определяется формулой

$$A = A(\Omega) = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n(a_n d_n - b_n c_n).$$

Оригинальное место в доказательстве Гурвица – выражение через коэффициенты Фурье длины границы с использованием соотношений $|dz/ds| = 1$, $|dt/ds| = 2\pi/L$:

$$L = L(\partial\Omega) = \int_0^L ds = \int_0^L \left|\frac{dz}{ds}\right|^2 ds = \int_0^L \left|\frac{dz}{dt}\right|^2 \left|\frac{dt}{ds}\right|^2 ds = \frac{2\pi}{L}\int_0^{2\pi} \left|\frac{dz}{dt}\right|^2 dt.$$

Отсюда с учетом равенства $|dz/dt|^2 = x'^2(t) + y'^2(t)$ получаем

$$\frac{L^2}{2\pi} = \int_0^{2\pi} [x'^2(t) + y'^2(t)]dt.$$

Подставляя ряды и интегрируя, приходим к формуле

$$\frac{L^2}{2\pi} = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n^2(a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2).$$

Очевидно, доказываемое изопериметрическое неравенство $A \le L^2/(4\pi)$ равносильно следующему неравенству для рядов

$$2\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n d_n - b_n c_n) \le \sum_{n=1}^{\infty} n^2(a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2),$$

которое является следствием простых неравенств $2a_n d_n \le a_n^2 + d_n^2$, $-2b_n c_n \le b_n^2 + c_n^2$ для всех натуральных n.

Рассмотрим случай равенства. При $n \ge 2$ имеем $n^2 > n$, поэтому равенство возможно лишь при условии $a_n = b_n = c_n = d_n = 0$. При $n = 1$ равенство в соответствующем неравенстве возможно лишь в том случае, когда $a_1 = d_1, b_1 = -c_1$, Таким образом, равенство реализуется лишь для области Ω, граница которой имеет параметрическое представление

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos t + b_1 \sin t, \quad y(t) = \frac{c_0}{2} - b_1 \cos t + a_1 \sin t,$$

следовательно, граница области представляет собой окружность радиуса $R = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}$ и с центром в точке $(a_0/2, c_0/2)$, так как

$$z(t) = x(t) + iy(t) = \frac{a_0 + ic_0}{2} + (a_1 - ib_1)(\cos t + i \sin t),$$

$$\left| z(t) - \frac{a_0 + ic_0}{2} \right| = |\, a_1 - ib_1|,$$

что завершает доказательство теоремы.

В задачах и упражнениях мы обсудим переформулировку изопериметрического неравенства с использованием конформных отображений.

Рассмотрим теперь классические теоремы площадей из теории однолистных функций (см. [7], глава 2).

3.2 Внутренняя теорема площадей

Теорема 3.2. (Внутренняя теорема площадей.) *Пусть $f(z)$ – функция, голоморфная в единичном круге D, и пусть*

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + ... = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n, \qquad |z| < 1.$$

Предположим, что $f(z)$ – однолистная функция, т. е. отображение $f : D \to \mathbb{C}$ является инъективным. Тогда площадь $A = A(f(D))$ образа круга при отображении f удовлетворяет неравенству

$$A = A(f(D)) \geq \pi.$$

Равенство реализуется только для случая, когда $f(D) = D$.

Доказательство. Обозначим $w = u + iv = f(z), |z| < 1$. Простые вычисления показывают, что якобиан конформного преобразования $w = f(z)$ равен $|f'(z)|^2$, т. е. дифференциальный элемент площади образа записывается так: $dudv = |f'(z)|^2 dxdy$. Поэтому

$$A = A(f(D)) = \iint_{f(D)} dudv = \iint_{D} |f'(z)|^2 dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 |f'(re^{i\theta})|^2 r dr.$$

Поскольку

$$|f'(re^{i\theta})|^2 = f'(re^{i\theta})\overline{f'(re^{i\theta})} = \sum_{n=1}^{\infty} na_n r^{n-1} e^{i(n-1)\theta} \sum_{n=1}^{\infty} n\overline{a}_n r^{n-1} e^{-i(n-1)\theta},$$

то нам остается перемножить ряды и проинтегрировать почленно с учетом ортогональности тригонометрической системы $e^{ik\theta}$. Будем иметь

$$A(f(D)) = 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} n^2 |a_n|^2 \int_0^1 r^{2n-1} dr =$$

$$= 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} n^2 |a_n|^2 \frac{1}{2n} = \pi(1 + 2|a_2|^2 + 3|a_3|^3 + ...).$$

Отсюда немедленно следует, что $A(f(D)) \geq \pi$. Кроме того, очевидно, равенство возможно тогда и только тогда, когда $a_n = 0,\ n \geq 2$, т. е. для функции $f(z) \equiv z$. Следовательно, $f(D) = D$ – единичный круг. Этим и завершается доказательство.

Замечание. Теорема и ее доказательство остаются справедливыми и без предположения однолистности рассматриваемой функции, но для неоднолистной функции под площадью образа круга нужно понимать площадь соответствующей римановой поверхности, для которой верна та же формула

$$A = A(f(D)) = \iint_D |f'(z)|^2 dxdy,$$

которая учитывает площади всех "листов" римановой поверхности в силу локального характера равенства $dudv = |f'(z)|^2 dxdy$.

3.3 Внешняя теорема площадей

Рассмотрим теперь конформные отображения внешности единичного круга $D^- = \{\zeta : |\zeta| > 1\} \subset \overline{\mathbb{C}}, \infty \in D^-$. В формулировке следующей теоремы площадь явно не фигурирует, но неотрицательность площади является основным доводом в доказательстве.

Теорема 3.3. (Внешняя теорема площадей.) *Пусть F – однолистное конформное отображение области D^-, оставляющее на месте бесконечно удаленную точку и имеющее следующее разложение в ряд Лорана*

$$F(\zeta) = \zeta + \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\zeta^n}, \quad |\zeta| > 1.$$

Тогда имеет место неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|\alpha_n|^2 \leq 1.$$

В частности, $|\alpha_1| \leq 1$, *и равенство* $|\alpha_1| = 1$ *справедливо тогда и только тогда, когда*

$$F(\zeta) = \zeta + \alpha_0 + \frac{e^{i\gamma}}{\zeta}, \quad \gamma \in \mathbb{R}.$$

Для доказательства рассматривается непустой компакт K_ρ с гладкой границей, определяемый соотношениями

$$K_\rho = \overline{\mathbb{C}} \setminus F(D_\rho^-), \qquad D_\rho^- = \{\zeta : |\zeta| > \rho\} \subset \overline{\mathbb{C}}.$$

Площадь K_ρ неотрицательна. Вычисляя эту площадь по формуле

$$A(K_\rho) = \int_0^{2\pi} u(t)v'(t)dt, \quad u(t) = ReF(\rho e^{it}),\, v(t) = ImF(\rho e^{it})$$

для любого фиксированного $\rho \in (1, \infty)$ и выражая ее через коэффициенты α_n, получаем

$$A(K_\rho) = \pi \left(\rho^2 - \sum_{n=1}^{\infty} n|\alpha_n|^2/\rho^{2n} \right) \geq 0.$$

Переходя к пределу при $\rho \to 1$, приходим к требуемому неравенству. Если $|\alpha_1| = 1$, то $|\alpha_n| = 0$ для любого $n \geq 2$, что дает второе утверждение теоремы.

Внешняя теорема площадей имеет ряд применений. С ними мы познакомимся при решении задач и упражнений к этой главе, а также в следующей главе при доказательстве одной теоремы Л. Бибербаха.

3.4 Задачи и упражнения

1) Пусть $w_0 \in \Omega$, где Ω – плоская односвязная область с конечной площадью $A(\Omega)$, $R_\Omega(w_0)$ – конформный радиус этой области в точке w_0. Докажите, что верно неравенство

$$A(\Omega) \geq \pi\, R_\Omega^2(w_0),$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда Ω – круг с центром в точке w_0.

Указание. Примените теорему 3.2 к функции

$$f(z) = \frac{g(z) - w_0}{R_\Omega(w_0)},$$

где g – однолистное конформное отображение единичного круга на область Ω с римановыми нормировками $g(0) = w_0$, $g'(0) > 0$.

2) Пусть Ω – односвязная область на плоскости со спрямляемой границей, $g : D \to \Omega$ – однолистное конформное отображение единичного круга на область Ω. Покажите, что для функции $z = g(\zeta)$ $(\zeta = \xi + i\eta \in D)$ справедливо следующее неравенство

$$\iint_D |g'(\zeta)|^2 d\xi\, d\eta \leq \frac{1}{4\pi} \left(\int_0^{2\pi} |g'(e^{i\theta})|\, d\theta \right)^2,$$

равносильное классическому изопериметрическому неравенству, так как

$$A(\Omega) = \iint_D |g'(\zeta)|^2 d\xi\, d\eta, \quad L(\partial\Omega) = \int_0^{2\pi} |g'(e^{i\theta})|\, d\theta.$$

Указание. Утверждение представляет собой простое упражнение, если область ограничена достаточно гладкой кривой и поэтому производная конформного отображения оказывается непрерывно продолжимой на замыкание единичного круга.

В общем случае придется воспользоваться теоремой Ф. Рисса:

производная конформного отображения $g : D \to \Omega$ единичного круга на односвязную область со спрямляемой границей имеет почти всюду на единичной окружности граничные значения $g'(e^{i\theta})$, определяемые как предельные значения по любым некасательным к границе путям, при этом

$$L(\partial\Omega) = \lim_{r \to 1^-} \int_0^{2\pi} |g'(r\, e^{i\theta})|\, d\theta = \int_0^{2\pi} |g'(e^{i\theta})|\, d\theta.$$

3) Пусть Ω – плоская односвязная область с конечным диаметром $\mathrm{diam}(\Omega)$. Докажите изопериметрическое неравенство Бибербаха

$$A(\Omega) \leq \frac{\pi}{4}\, \mathrm{diam}^2(\Omega),$$

где равенство достигается тогда и только тогда, когда Ω – круг.

Указание. Если не справились с этой задачей, то найдите самое простое доказательство этого утверждения (из нескольких известных) в замечательной книге Дж. Литтлвуда под названием "Математическая смесь".

Приведем схему Литтлвуда.

Без ограничения общности можно считать, что рассматриваемая область является выпуклой, расположена в правой полуплоскости, ее проекция на ось абсцисс есть интервал $(0, d)$, где $d = \mathrm{diam}(\Omega)$. В полярных координатах

$$A(\Omega) = \int_{-\pi/2}^{0} dt \int_{0}^{r(t)} r\,dr + \int_{0}^{\pi/2} d\theta \int_{0}^{r(\theta)} r\,dr = \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi/2} (r^2(\theta - \pi/2) + r^2(\theta))\,d\theta,$$

где $r = r(\theta)$ $(-\pi \leq \theta \leq \pi/2)$ – уравнение границы области.

Остается воспользоваться тем, что выражение $r^2(\theta - \pi/2) + r^2(\theta)$ равно по теореме Пифагора квадрату длины некоторой хорды AB, не превосходящему $\mathrm{diam}^2(\Omega)$ по определению диаметра.

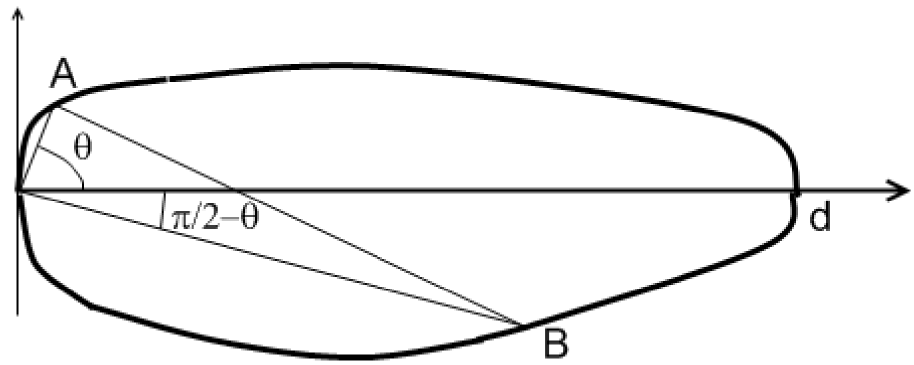

Рис. 3.2: К доказательству Литтлвуда

4) Пусть Ω – плоская односвязная область с конечным диаметром, и пусть $w_0 \in \Omega$. Докажите, что верно неравенство

$$R_\Omega(w_0) \leq \frac{1}{2}\,\mathrm{diam}(\Omega),$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда Ω – круг с центром в точке w_0.

5) Пусть Ω – плоская односвязная область со спрямляемой границей. Существует ли абсолютная положительная постоянная C такая, что для любой

такой области Ω

$$A(\Omega) \leq C\ L(\partial\Omega).$$

Указание. Ответ таков: нет, не существует. "Наказание" обусловлено тем, что не соблюдены размерности сравниваемых величин (квадратные метры не сравнимы с метрами!).

Для обоснования отрицательного ответа постройте последовательность односвязных областей Ω_n со спрямляемыми границами и таких, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A(\Omega_n)}{L(\partial\Omega_n)} = \infty.$$

6) Пусть Ω – плоская односвязная область со спрямляемой границей. Существует ли абсолютная положительная постоянная C такая, что

$$A(\Omega) \geq C\ L^2(\partial\Omega)$$

для любой такой области Ω?

Указание. Ответ: нет, не существует.

Чтобы убедиться в этом постройте последовательность односвязных областей Ω_n со спрямляемыми границами и таких, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A(\Omega_n)}{L^2(\partial\Omega_n)} = 0.$$

Нетрудно видеть, что таким свойством обладает последовательность прямоугольников со сторонами длины n и $1/n$. Этот пример показывает, что простое соблюдение размерности не гарантирует существования изопериметрического неравенства. Рассуждения на эту тему с полезными контрпримерами можно найти в книге [9].

Отметим также, что тематика, связанная с изопериметрическими неравенствами геометрии и математической физики, интенсивно развивается, см., например, книгу [21], статьи [17] и [18].

7) Докажите новую формулу для площади (см. в [1]):

$$A(\Omega) = \frac{1}{2} \iint_\Omega |\nabla R_\Omega(x+iy)|^2\ dx\, dy.$$

Указание. Воспользуйтесь уравнением Лиувилля для конформного радиуса и формулой Грина

$$\iint_\Omega (u\,\Delta v + (\nabla u,\, \nabla v))\; dx\,dy = \int_{\partial\Omega} u\,\frac{\partial v}{\partial n}\,ds$$

с подходящим выбором функций $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$.

Глава 4

Теоремы Кёбе и Бибербаха и их применения

4.1 Определения основных классов однолистных функций

В начале XX века для стандартизации проблем, возникающих при исследовании однолистных конформных отображений $f : \Omega \to \overline{\mathbb{C}}$, были введены два основных класса однолистных функций. Приведем их определения.

1) Класс $\mathbb{S}$ – класс голоморфных однолистных функций $f(z)$, определенных в $D = \{z : |z| < 1\}$ и имеющих там разложение в ряд Тейлора вида

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + ... = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n, \quad |z| < 1.$$

Таким образом, требуется выполнение нормировок $f(0) = 0 = f'(0) - 1$, т. е. отличие вышеприведенного ряда для функции класса $\mathbb{S}$ от общего разложения в ряд Тейлора заключается в том, что $a_0 = 0$ и $a_1 = 1$. Отметим также простой геометрический смысл нормировок двух первых коэффициентов: *для любой функции $f \in \mathbb{S}$ область $\Omega = f(D)$ содержит точку $w = 0$ и конформный радиус Ω в этой точке равен 1, тем самым фиксирована одна из гиперболических характеристик области.*

Нормировка $f'(0) = 1$ для функций класса $\mathbb{S}$ позволяет также фиксировать ветвь аргумента производной $\mathrm{Arg} f'(z)$ условием $\mathrm{Arg} f'(0) = 0$.

2) Класс $\mathbf{\Sigma}$ – класс мероморфных однолистных в области в $D^- = \{\zeta : |\zeta| > 1\}$ функций $F(\zeta)$ с разложением в ряд Лорана

$$F(\zeta) = \zeta + \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{\zeta} + \frac{\alpha_2}{\zeta^2} + ... = \zeta + \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\zeta^n}, \quad |\zeta| > 1.$$

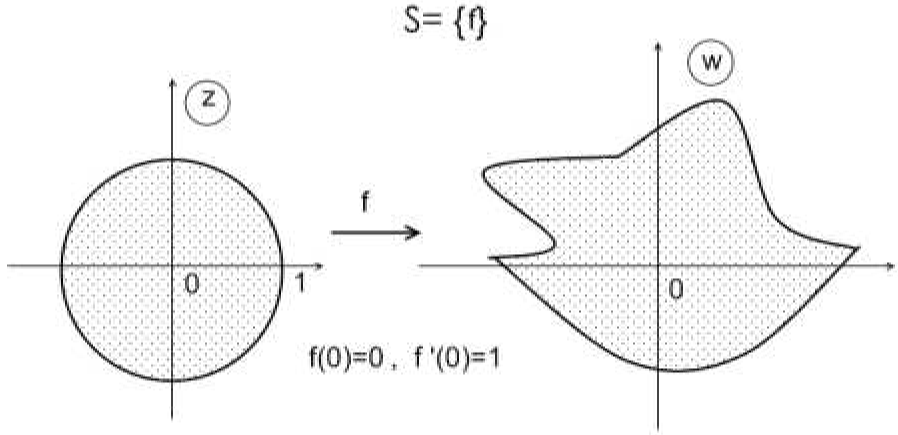

Рис. 4.1: Голоморфные функции

Видно, что предписаны следующие дополнительные условия нормировки: $F(\infty) = \infty, F'(\infty) = 1$. В частности, на бесконечности функция $F(\zeta)$ имеет простой полюс, в других точках области D^- функция $F(\zeta)$ является голоморфной.

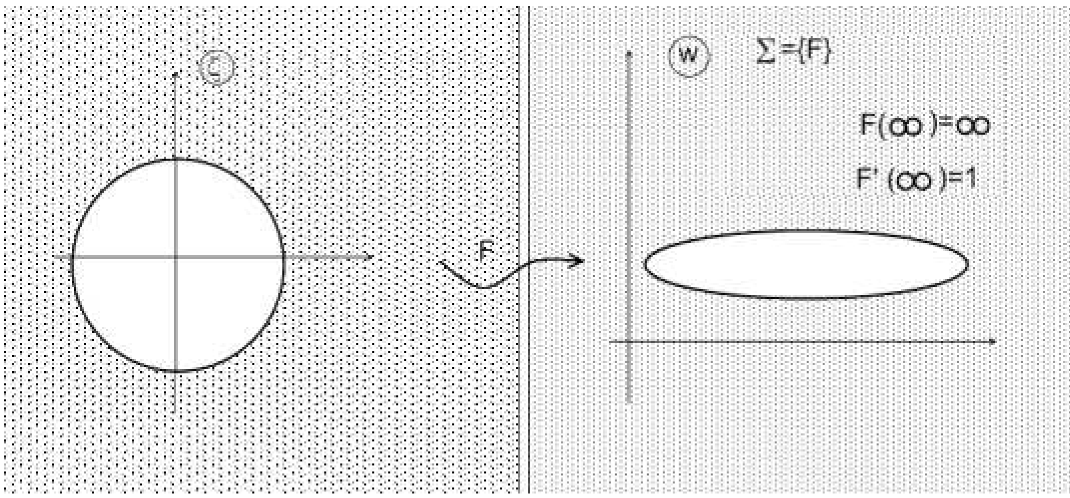

Рис. 4.2: Мероморфные функции

Отметим, что обозначения этих классов однолистных функций связаны с немецким словом "Schlicht". Словосочетание "однолистная функция" применительно к однолистным конформным отображениям на английском языке передается как "schlicht function" либо "univalent function".

Внешняя теорема площадей (см. предыдущую главу) утверждает, что для функции $F \in \mathbf{\Sigma}$ имеет место неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|\alpha_n|^2 \le 1,$$

в частности,

$$|\alpha_1| \le 1; \qquad |\alpha_1| = 1 \Leftrightarrow F_\alpha(\zeta) = \zeta + \frac{e^{i\alpha}}{\zeta}, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Удивительный факт: топологическое условие однолистности отображения порождает метрические следствия – оценки модулей коэффициентов. Аналогично обстоит дело и с функциями класса $\mathbb{S}$. Для них оказываются справедливыми разнообразные оценки.

4.2 Теорема и гипотеза Бибербаха

Теорема 4.1. (Теорема Бибербаха, 1916 год.) *Для любой функции $f \in \mathbb{S}$ с разложением в ряд Тейлора*

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + ... = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n, \quad |z| < 1,$$

имеет место точная оценка $|a_2| \le 2$. Равенство $|a_2| = 2$ реализуется тогда и только тогда, когда

$$f(z) \equiv K(z) = \frac{z}{(1 - e^{i\gamma} z)^2}, \quad \gamma \in \mathbb{R}.$$

где $K(z)$ – так называемая функция Кёбе.

Доказательство. Для $\forall f \in \mathbb{S}$ рассмотрим порождаемую ею функцию

$$g(z) = \sqrt{f(z^2)} = \sqrt{z^2 + a_2 z^4 + a_3 z^6 + ...} =$$

$$= z\sqrt{1 + a_2 z^2 + a_3 z^4 + a_4 z^6 + ... + a_n z^{2n-2} + ...},$$

где ветвь корня фиксируется условием: $\sqrt{1} = +1$. Имеем

$$f \in \mathbb{S} \Leftrightarrow g \in \mathbb{S}.$$

Условия нормировки для $g(z)$ верны по построению, а однолистность отображения g легко проверяется геометрически.

Пользуясь тем, что $(1+w)^\alpha = 1 + \alpha w + o(w)$, $w \to 0$, при $\alpha = \frac{1}{2}$ легко получить первые слагаемые в разложении $g(z)$:

$$g(z) = z(1 + a_2 z^2 + ...)^{1/2} =$$

$$= z(1 + a_2 z^2 + o(z^2))^{1/2} = z + \frac{a_2}{2} z^3 + ...$$

С использованием дробно-линейных замен $\zeta = 1/z$, $w = 1/g$, которые сохраняют однолистность, введем в рассмотрение функцию

$$F(\zeta) = \frac{1}{g(1/\zeta)} = \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{z}\left(\frac{1}{1 + (a_2/2)z^2 + ...}\right).$$

Имеем следующее разложение в окрестности бесконечно удаленной точки $\zeta = \infty$:

$$F(\zeta) = \frac{1}{z}\left(1 - \frac{a_2}{2} z^2 + o(z^2)\right) =$$

$$= \frac{1}{z} - \frac{a_2}{2} z + o(z) = \zeta - \frac{a_2}{2\,\zeta} + o\left(\frac{1}{\zeta}\right), \qquad \zeta \to \infty.$$

Для однолистной функции $F(\zeta)$ выполнены условия $F(\infty) = \infty, F'(\infty) = 1$, следовательно, $F \in \mathbf{\Sigma}$. По второму утверждению внешней теоремы площадей имеем: $|\alpha_1| \leq 1$, но для нашей функции $\alpha_1 = -a_2/2$, поэтому

$$|\alpha_1| = \frac{|a_2|}{2} \leq 1 \Leftrightarrow |a_2| \leq 2.$$

В случае равенства $|a_2| = 2$ будем иметь следующую цепочку

$$|a_2| = 2 \Leftrightarrow |\alpha_1| = 1 \Leftrightarrow F_\alpha(\zeta) = \zeta + \frac{e^{i\alpha}}{\zeta} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow g_\alpha(z) = \frac{1}{F_\alpha(1/z)} \Leftrightarrow g_\alpha^2(\sqrt{z}) = f_\alpha(z).$$

Непосредственные вычисления показывают, что

$$g_\alpha(z) = \frac{1}{1/z + e^{i\alpha} z} = \frac{z}{1 + e^{i\alpha} z^2},$$

следовательно,

$$f_\alpha(z) = \left(\frac{\sqrt{z}}{1+e^{i\alpha}z}\right)^2 = \frac{z}{(1+e^{i\alpha}z)^2}.$$

Таким образом, экстремальная функция $f_\alpha(z)$ совпадает в точности с функцией Кёбе. Приведенный в формулировке теоремы вид $z/(1-e^{i\gamma}z)^2$ этой функции можно получить заменой констант $\alpha = \gamma + \pi$, так как тогда $e^{i\alpha} = e^{i\pi}e^{i\gamma} = -e^{i\gamma}$.

Теорема доказана.

Отметим, что экстремальная в теореме функция – функция Кёбе – однолистно отображает единичный круг на всю плоскость, из которой удален прямолинейный луч (см. задачу 4 из пункта 1.5)

$$L_\gamma = \left\{z = -re^{-i\gamma} : \frac{1}{4} \le r < \infty\right\}.$$

В этом легко убедиться, представив функцию Кёбе как суперпозицию функции Жуковского и дробно-линейного отображения, так как

$$K(z) = \frac{z}{(1-e^{i\gamma}z)^2} = \frac{1}{e^{2i\gamma}z + \frac{1}{z} - 2e^{i\gamma}}.$$

Дифференцируя почленно ряд (бесконечную геометрическую прогрессию) в единичном круге

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + ...,$$

легко получаем разложение в ряд Тейлора функции Кёбе при $\gamma = 0$:

$$K_0(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = z + 2z^2 + 3z^3 + ... + nz^n + ...$$

Итак, для этой функции $a_n = n$ при любом $n \ge 2$. С учетом этого факта в 1916 году Л. Бибербах выдвинул следующую гипотезу: для любой функции $f \in \mathbb{S}$

$$|a_n| = \frac{|f^{(n)}(0)|}{n!} \le n.$$

Очевидно, если эта гипотеза верна, то экстремальной функцией, для которой реализуются равенства в этих оценках, является функция Кёбе.

4.3 Теорема Кёбе об одной четвертой

В следующей теореме экстремальной является та же функция Кёбе.

Теорема 4.2. (Теорема П. Кёбе об одной четвертой.) *Пусть* $f \in \mathbb{S}$*, тогда расстояние* $d(f) = \mathrm{dist}(0, \partial \mathrm{f}(\mathrm{D}))$ *от начала координат* $w = 0$ *до границы области* $\Omega = f(D)$ *не меньше, чем* $1/4$. *Равенство* $d(f) = 1/4$ *реализуется тогда и только тогда, когда*

$$f(z) \equiv K(z) = \frac{z}{(1 - e^{i\gamma} z)^2}.$$

Доказательство. Пусть $f \in \mathbb{S}$, и пусть эта функция не принимает в единичном круге значения c, т. е. $c \notin \Omega = f(D)$. Тогда $1 - f(z)/c \neq 0$ единичном круге, и поэтому функция g, определенная равенством

$$g(z) = \frac{f(z)}{1 - f(z)/c},$$

является аналитической и однолистной в единичном круге и принадлежит классу $\mathbb{S}$. Ее разложение вблизи начала координат легко выписывается:

$$g(z) = z + (a_2 + 1/c)z^2 + O(z^3).$$

По теореме Бибербаха вторые коэффициенты функций $f \in \mathbb{S}$ и $g \in \mathbb{S}$ допускают точные оценки

$$|a_2| \leq 2, \quad |a_2 + 1/c| \leq 2,$$

следовательно,

$$|c| \geq \frac{1}{|a_2 + 1/c| + |a_2|} \geq \frac{1}{4},$$

что и требовалось доказать.

Очевидно, экстремальной является функция Кёбе, и только она. Этим и завершается доказательство теоремы.

4.4 Классы звездообразных и выпуклых отображений

К. Лёвнер (1923 г.) доказал, что гипотеза Бибербаха верна при $n = 3$, а именно, $|a_3| \leq 3$. После него в течение шести десятилетий гипотезой занимались многие математики, подтверждая ее в частных случаях. Точку поставил

Л. де Бранж в 1985 году, доказав, что гипотеза Бибербаха верна при любом $n \geq 2$.

Аналоги гипотезы Бибербаха доказывали и в подклассах $\mathbb{S}$, определяемых некоторыми геометрическими свойствами. Мы приведем здесь два наиболее известных подкласса $\mathbb{S}$.

1) Класс звездообразных функций $\mathbb{S}^* \subset \mathbb{S}$:

условие $f \in \mathbb{S}^*$ означает по определению, что $f \in \mathbb{S}$ и область $f(D) = \Omega$ является звездообразной относительно начала координат, т. е. для любой точки $w \in f(D)$ отрезок прямой $[0, w]$ лежит в области $f(D)$.

Необходимым и достаточным условием принадлежности $f \in \mathbb{S}^*$ является голоморфность функции в единичном круге, нормировки $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ и выполнение неравенства

$$\mathrm{Re}\frac{zf'(z)}{f(z)} > 0 \qquad (\forall z \in D).$$

Здесь, как и всюду в подобных ситуациях, мы считаем, что рассматриваемые функции продолжены по непрерывности на устранимую особую точку. В данном случае подразумевается, что $zf'(z)/f(z) = 1$ в точке $z = 0$, так как

$$\lim_{z \to 0} \frac{zf'(z)}{f(z)} = f'(0) \lim_{z \to 0} \frac{z}{f(z)} = 1.$$

2) Класс выпуклых функций $\mathbb{S}^0 \subset \mathbb{S}$:

условие $f \in \mathbb{S}^0$ означает по определению, что $f \in \mathbb{S}$ и область $f(D) = \Omega$ является выпуклой, т. е. для любых двух точек $w_1 \in f(D)$ и $w_2 \in f(D)$ отрезок прямой $[w_1, w_2]$ лежит в области $f(D)$.

Необходимым и достаточным условием принадлежности $f \in \mathbb{S}^0$ является голоморфность функции в единичном круге, нормировки $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ и выполнение неравенства

$$\mathrm{Re}\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > 0 \qquad (\forall z \in D).$$

Очевидно, что выпуклая область звездообразна относительно любой своей точки. Поэтому $\mathbb{S}^0 \subset \mathbb{S}^*$.

Укажем также геометрический смысл приведенных выше критериев звездообразности и выпуклости.

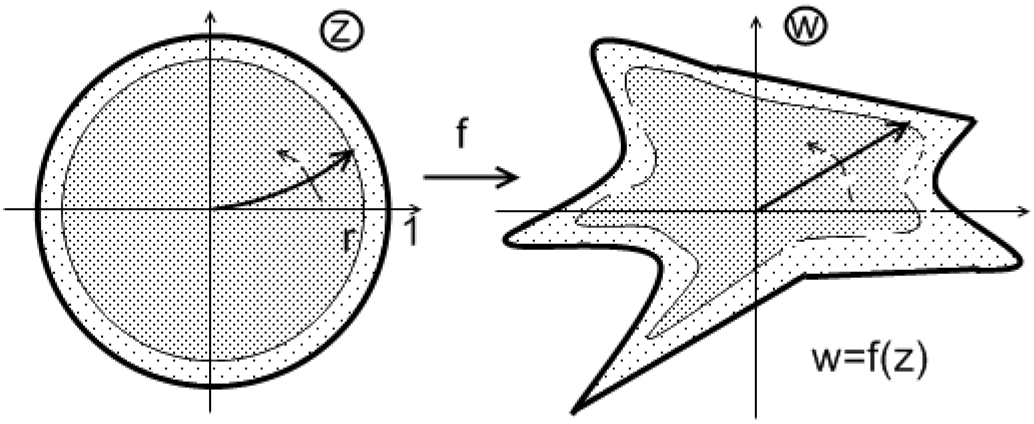

Рис. 4.3: Отображение на звездообразную область

Условие звездообразности основано на тождестве

$$\frac{d\,\mathrm{Arg} f(re^{i\theta})}{d\,\theta} = \mathrm{Re}\frac{zf'(z)}{f(z)} > 0 \qquad (\forall z = re^{i\theta} \in D)$$

и геометрически означает, что с ростом $\theta \in [0, 2\pi]$ пульсирующий отрезок $[0, f(re^{i\theta})]$ монотонно вращается против часовой стрелки.

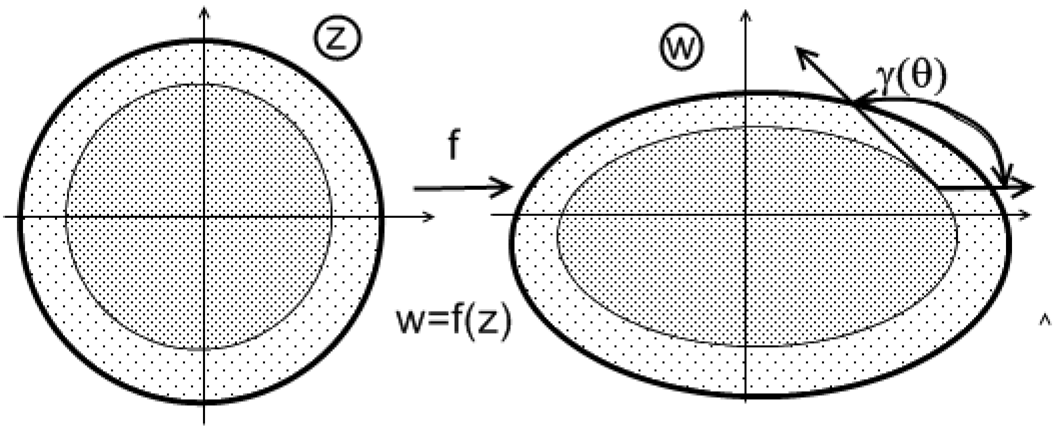

Рис. 4.4: Отображение на выпуклую область

Условие выпуклости основано на тождестве

$$\frac{d\,\left(\pi/2 + \theta + \mathrm{Arg} f'(re^{i\theta})\right)}{d\,\theta} = \mathrm{Re}\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > 0 \qquad (\forall z = re^{i\theta} \in D)$$

и геометрически означает, что при любом фиксированном $r = |z| \in (0,1)$ с ростом θ касательная к кривой $L_r = \{f(re^{i\theta}) \;:\; \theta \in [0, 2\pi]\}$ монотонно вращается против часовой стрелки, т. е. угол касательной к L_r, определяемый формулой

$$\gamma(\theta) = \frac{\pi}{2} + \theta + \operatorname{Arg} f'(re^{i\theta}),$$

является монотонно возрастающей функцией от полярного угла θ.

В дальнейшем, а именно, в главе 6 мы познакомимся с теорией подчиненных функций, позволяющей легко доказать неравенства: $|a_n| \le n$ в классе однолистных звездообразных функций, и $|a_n| \le 1$ в классе однолистных выпуклых функций. В этой главе ограничимся доказательством важного частного случая последнего неравенства.

Теорема 4.3. *Пусть функция $f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots$ голоморфна при $|z| < 1$, и $f \in \mathbb{S}^0$, тогда $|a_2| \le 1$.*

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$P(z) = 1 + z\frac{f''(z)}{f'(z)}, \quad |z| < 1.$$

В окрестности точки $z = 0$ имеем:

$$P(z) = 1 + z\frac{2a_2 + 6a_3 z + \ldots}{1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \ldots} = 1 + 2a_2 z + o(z).$$

Функция $\varphi = (P-1)/(P+1)$ определяет отображение полуплоскости $\operatorname{Re} P > 0$ на круг $|\varphi| < 1$. Поэтому функция

$$\varphi(z) = \frac{P(z) - 1}{P(z) + 1}$$

обладает свойствами:

$$\varphi(z) = \frac{1 + 2a_2 z - 1 + o(z)}{1 + 2a_2 z + 1 + o(z)} = a_2 z + o(z), \quad z \to 0,$$

и $|\varphi(z)| < 1$ при $|z| < 1$.

К функции $\varphi(z)$ применяем второе утверждение леммы Шварца. Это приводит к нужной оценке

$$|\varphi'(0)| = |a_2| \le 1.$$

Случай равенства возможен лишь тогда, когда $|\varphi'(0)| = 1 \Leftrightarrow \varphi(z) = e^{i\alpha}z$. Таким образом, равенство $|a_2| = 1$ возможно тогда и только тогда, когда

$$f(z) = \frac{z}{1 + e^{i\alpha}z}.$$

Очевидно, полученная экстремальная функция определяет дробно-линейное отображение единичного круга на некоторую полуплоскость, граница которой находится на расстоянии $1/2$ от начала координат.

4.5 Задачи и упражнения

1) Покажите, что функция $w = f(z)$ принадлежит классу выпуклых однолистных функций $\mathbb{S}^o$ тогда и только тогда, когда функция $w = zf'(z)$ принадлежит классу $\mathbb{S}^*$ звездообразных однолистных функций.

2) Рассматривая конформный радиус как функцию, заданную в односвязной области Ω, оценим сверху модуль его градиента $\nabla R_\Omega(w)$.

Решение. Через $w = f(z)$ обозначим функцию, осуществляющую однолистное конформное отображение единичного круга $D = \{z : |z| < 1\}$ на область Ω. Тогда, как мы знаем из главы 2, для любой точки $w = f(z) \in \Omega$ имеет место равенство

$$R_\Omega(w) = (1 - |z|^2)|f'(z)|.$$

Градиент является двумерным вектором

$$\nabla R_\Omega(w) = \left(\frac{\partial R_\Omega(w)}{\partial u}, \ \frac{\partial R_\Omega(w)}{\partial v}\right), \qquad w = u + iv,$$

поэтому можем считать его комплексным числом и найти по формуле

$$\nabla R_\Omega(w) = 2\frac{\partial R_\Omega(w)}{\partial \overline{w}} = \frac{\partial R_\Omega(w)}{\partial u} + i\,\frac{\partial R_\Omega(w)}{\partial v}.$$

В силу условий Коши-Римана определения производной будем иметь

$$\frac{\partial w}{\partial \overline{z}} = 0, \quad \frac{\partial \overline{w}}{\partial \overline{z}} = \overline{f'(z)},$$

поэтому

$$\frac{\partial R_\Omega}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial R_\Omega}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial \overline{z}} + \frac{\partial R_\Omega}{\partial \overline{w}}\frac{\partial \overline{w}}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial R_\Omega}{\partial \overline{w}}\,\overline{f'(z)}.$$

Отсюда выводим
$$\nabla R_\Omega(w) = \frac{2}{\overline{f'(z)}} \frac{\partial R_\Omega}{\partial \overline{z}}.$$
Пользуясь представлением
$$R_\Omega = (1 - z\overline{z})\sqrt{f'(z)}\sqrt{\overline{f'(z)}},$$
непосредственно находим
$$\frac{\partial R_\Omega}{\partial \overline{z}} = -z|f'(z)| + (1-|z|^2) f'^{\frac{1}{2}}(z)\ \frac{1}{2}\ \frac{\overline{f''(z)}}{\overline{f'(z)}}$$
и, окончательно,
$$|\nabla R_\Omega(w)| = \left| \frac{f''(z)}{f'(z)}(1-|z|^2) - 2\overline{z} \right|.$$
Правую часть можно оценить сверху. Для этого при произвольном, но фиксированном $z \in D$ рассмотрим преобразование Кёбе
$$g(\zeta) = \frac{f(\frac{\zeta+z}{1+\overline{z}\zeta}) - f(z)}{(1-|z|^2)f'(z)} = \zeta + a_2(g)\zeta^2 + a_3(g)\zeta^3 + ..., \quad |\zeta| < 1.$$
Поскольку $g(\zeta) \in S$, то по теореме Бибербаха имеет место точная оценка
$$|a_2(g)| = |g''(0)|/2 \leq 2.$$
Но, с другой стороны, простые вычисления показывают, что
$$2a_2(g) = g''(0) = \frac{f''(z)}{f'(z)}(1-|z|^2) - 2\overline{z},$$
следовательно,
$$|\nabla R_\Omega(w)| = \left| \frac{f''(z)}{f'(z)}(1-|z|^2) - 2\overline{z} \right| = 2|\, a_2(g)| = |g''(0)| \leq 4.$$

Отметим, что описание ряда интересных свойств градиента конформного радиуса можно найти в статье [19] и в книге [20].

3) Опишите для предыдущей задачи все экстремальные односвязные области Ω, т. е. области, которые содержат хотя бы одну точку $w \in \Omega$ со свойством
$$|\nabla R_\Omega(w)| = 4.$$

4) Пусть $f(z) = z + a_2 z^2 + ...$ голоморфна при $|z| < 1$. Докажите, что $f \in \mathbb{S}^0$ тогда и только тогда, когда

$$\int_0^{2\pi} \left| \mathrm{Re}\left(1 + \frac{re^{i\theta} f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})}\right) \right| d\theta = 2\pi \qquad (\forall r \in [0,\,1)).$$

5) Докажите аналог теоремы Кёбе об одной четвертой для выпуклых функций:

если $f \in \mathbb{S}^0$, то расстояние $d(f) = \mathrm{dist}(0, \partial f(D))$ от начала координат $w = 0$ до границы области $\Omega = f(D)$ не меньше, чем $1/2$.

Равенство $d(f) = 1/2$ реализуется лишь для отображений единичного круга на полупоскость, т. е. для функций вида

$$f(z) = \frac{z}{1 - e^{i\gamma} z}.$$

6) Пусть Ω – односвязная область, конформно эквивалентная кругу и не содержащая бесконечно удаленной точки. Через $\mathrm{dist}(w, \partial\Omega)$ обозначим расстояние от точки w до границы области Ω.

Докажите неравенства

$$\mathrm{dist}(w, \partial\Omega) \le R_\Omega(w) \le 4\,\mathrm{dist}(w, \partial\Omega), \quad w \in \Omega.$$

Указание. По большому счету, левое неравенство является следствием леммы Шварца, а правое неравенство эквивалентно теореме Кёбе об одной четвертой. Но для доказательства нужны предварительные построения. Начните с сравнения конформных радиусов области Ω в точке w и вписанного в эту область круга с центром в этой точке w и с радиусом, равным $\mathrm{dist}(w, \partial\Omega)$.

7) Пусть Ω – выпуклая плоская область, конформно эквивалентная кругу. Докажите, что в этом случае

$$\mathrm{dist}(w, \partial\Omega) \le R_\Omega(w) \le 2\,\mathrm{dist}(w, \partial\Omega), \quad w \in \Omega.$$

Глава 5

Дифференциальное уравнение Лёвнера

Пусть $\kappa : [0, +\infty) \to \mathbb{C}$ – комплекснозначная кусочно-непрерывная функция, $|\kappa(t)| \equiv 1$. Рассматривается дифференциальное уравнение, предложенное К. Лёвнером:

$$\frac{dw}{dt} = -w\frac{1+\kappa w}{1-\kappa w}, \qquad (\kappa = \kappa(t)). \tag{1}$$

Для этого уравнения решается задача Коши с начальным условием

$$w(0) = z, \tag{2}$$

где z – фиксированное комплексное число, $|z| < 1$.

Как решение задачи (1), (2) возникает функция $w = f(z, t)$, которую можно рассматривать как функцию двух переменных, причем $0 \le t < \infty$, z – комплексная переменная, $z \in D = \{z : |z| < 1\}$. Как известно из курса дифференциальных уравнений, существование решения задачи Коши для уравнения первого порядка с начальным условием доказывается методом последовательных приближений Пикара. Этот метод применим и для комплекснозначных функций. Полагаем, что нулевое приближение $w_0 = z$ – константа (по отношению к переменной $t \in [0, \infty)$), а первое приближение определяется формулой

$$w_1 = z\ \exp\left(-\int\limits_0^t \frac{1+\kappa(\tau)z}{1-\kappa(\tau)z}d\tau\right),$$

далее по индукции: формула для n-ого приближения имеет вид

$$w_n = z\ \exp\left(-\int\limits_0^t \frac{1+\kappa(\tau)w_{n-1}}{1-\kappa(\tau)w_{n-1}}d\tau\right).$$

Если последовательность сходится, то предельная функция $w = \lim_{n\to\infty} w_n$ удовлетворяет интегральному уравнению, эквивалентному рассматриваемой задаче Коши. Поэтому нам достаточно показать сходимость метода Пикара.

5.1 О свойствах решения уравнения Лёвнера

Теорема 5.1. (Теорема Лёвнера.) *Задача Коши (1), (2) имеет единственное решение, причем* $e^t f(z,t) = z + a_2(t)z^2 + a_3(t)z^3 + \ldots$ *при* $|z| < 1$ *и* $f(\,\cdot\,,t) : D \to \mathbb{C}$ *– однолистное отображение, т. е.* $f(z,t)$ *как функция от* z *при любом фиксированном* $t \in [0,\infty)$ *является голоморфной, однолистной в единичном круге* D *и*

$$e^t f(\,\cdot\,,t) \in \mathbb{S}.$$

Кроме того, существует предельная функция

$$\lim_{t\to\infty} e^t f(z,t) = f(z) \in \mathbb{S}.$$

Доказательство. Легко показать, что последовательность w_n ограничена. Имеем

$$w_n = z \exp\left(-\int_0^t P(\tau, w_{n-1})d\tau\right),$$

где функция

$$P(\tau, w) = \frac{1+\kappa w}{1-\kappa w}$$

будет иметь положительную вещественную часть, если $|w| < 1$. Покажем по индукции, что $|w_n| < 1$. Имеем $|w_0| = |z| < 1$. Предположим, что $|w_k| < 1$ для $k = \overline{0, n-1}$ и докажем, что утверждение верно для w_n. Функция $p = (1+\zeta)/(1-\zeta)$ определяет отображение круга $|\zeta| < 1$ на правую полуплоскость $\operatorname{Re} p > 0$. Полагая $\kappa w_{n-1} = \zeta$, с учетом соотношений $|\kappa| = 1, |w_{n-1}| \le |z|$, получаем $\operatorname{Re} P(\tau, w_{n-1}) > 0$. Следовательно,

$$|w_n| = |z| \exp\left(-\int_0^t \operatorname{Re} P(\tau, w_{n-1})d\tau\right) \le |z| \qquad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

Чтобы доказать сходимость, заметим, что

$$\frac{dw_n}{dt} = -z \exp\left(-\int_0^t P(\tau, w_{n-1})d\tau\right) P(t, w_{n-1}) = -w_n P(t, w_{n-1})$$

и оценим

$$\frac{|d(w_n - w_{n-1})|}{dt} = \left|\frac{dw_n}{dt} - \frac{dw_{n-1}}{dt}\right| =$$

$$= |w_n P(t, w_{n-1}) - w_{n-1} P(t, w_{n-2})| \leq$$

$$\leq |w_n - w_{n-1}||P(t, w_{n-1})| + |w_{n-1}||P(t, w_{n-1}) - P(t, w_{n-2})|.$$

Применяя соотношения

$$P(t, w_{n-1}) - P(t, w_{n-2}) = \frac{1 + \kappa w_{n-1}}{1 - aew_{n-1}} - \frac{1 + \kappa w_{n-2}}{1 - \kappa w_{n-2}} =$$

$$= \frac{2\kappa(w_{n-1} - w_{n-2})}{(1 - \kappa w_{n-1})(1 - \kappa w_{n-2})},$$

$$|\kappa w_k| < |z| \ \Rightarrow |P(t, w_k)| \leq \frac{1 + |z|}{1 - |z|}$$

и

$$|P(t, w_{n-1}) - P(t, w_{n-2})| \leq \frac{2|w_{n-1} - w_{n-2}|}{(1 - |z|)^2}$$

к производным, получим

$$\left|\frac{d(w_n - w_{n-1})}{dt}\right| = A(z)|w_n - w_{n-1}| + B(z)|w_{n-1} - w_{n-2}|.$$

Здесь

$$A(z) = \frac{1 + |z|}{1 - |z|}, \qquad B(z) = \frac{2|z|}{(1 - |z|)^2}$$

– константы по отношению к переменной t, так как в задаче Коши значение z фиксировано. Поэтому получаем следующее дифференциальное неравенство

$$\frac{d|w_n - w_{n-1}|}{dt} - A|w_n - w_{n-1}| \leq B|w_{n-1} - w_{n-2}|.$$

Считаем, что $t \in [0, t_0]$, умножаем дифференциальное неравенство на e^{-At} и интегрируем. Будем иметь

$$\left(\frac{dy}{dt} - Ay\right)\ e^{-At} = (e^{-At}y)' = Be^{-At}|w_{n-1} - w_{n-2}|.$$

Простые выкладки дают

$$|w_n - w_{n-1}| \leq e^{At_0} B \int\limits_0^t |w_{n-1}(\tau) - w_{n-2}(\tau)| d\tau.$$

Таким образом, имеем

$$|w_1 - w_0| = |z| \left| \exp\left(-\int\limits_0^t P(\tau, z) d\tau \right) - 1 \right| \leq Ct.$$

Итеративно применяя эти оценки, получаем $|w_2 - w_1| \leq \text{const}\ t^2$, ...,

$$|w_n - w_{n-1}| \leq C(z) \frac{(e^{At_0} Bt)^{n-1}}{(n-1)!} \to 0, \qquad n \to \infty$$

равномерно по $t \in [0, t_0]$. Указанная в выносной формуле сходимость к нулю следует из свойств экспоненциальной функции. Действительно, так как

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

общий член ряда стремится к нулю в силу хорошо известного необходимого условия сходимости любого ряда.

Таким образом, сходимость метода последовательных приближений и, следовательно, существование решения задачи Коши доказаны.

Стандартно доказывается единственность решения.

Однолистность функции $w = f(z, t)$ доказывается от противного.

Предположим, что $z_1 \neq z_2, |z_1| < 1, |z_2| < 1$, но $\exists\ t_1$ такое, что

$$f(z_1, t_1) = f(z_2, t_1).$$

Но тогда по теореме единственности

$$f(z_1, t) = f(z_2, t), 0 \leq t < \infty,$$

но при $t = 0$ имеем: $f(z_1, 0) = z_1 = z_2 = f(z_2, 0) \Rightarrow z_1 = z_2$ – противоречие.

Проверим теперь нормировку. Для этого уравнение Лёвнера для $w = f(z, t)$ перепишем так:

$$\frac{d(\ln f + t)}{dt} = -\frac{2\kappa f}{1 - \kappa f},$$

отсюда имеем

$$\ln \frac{f(z, t)}{f(z, 0)} + t = -\int\limits_0^t \frac{2\kappa(\tau) f(z, \tau) d\tau}{1 - \kappa(\tau) f(z, \tau)}.$$

Проинтегрируем с учетом условия $f(z,0)=z$, тогда

$$\frac{f(z,t)}{z}=e^{-t}\exp\left(-\int_0^t \frac{2\kappa f}{1-\kappa f}d\tau\right)=e^{-t}(1+c_2(t)z+c_3(t)z^2+...).$$

Отсюда непосредственно следует требуемое разложение в окрестности начала координат:

$$f(z,t)=e^{-t}(z+c_2(t)z^2+c_3(t)z^3+...).$$

И наконец, голоморфность предельной функции и ее однолистность легко следуют из общих теорем ТФКП. Таким образом, существует

$$\lim_{t\to\infty}e^t f(z,t)=f(z)=z+c_2z^2+c_3z^3+...\in\mathbb{S}.$$

Выбирая всевозможные допустимые функции $\kappa(t)$ в дифференциальном уравнении Лёвнера, мы получаем множество $\mathbb{S}'\subset\mathbb{S}$, состоящее из таких предельных однолистных функций.

5.2 Вычисления и оценки коэффициентов

Теорема 5.2. (К. Лёвнер.) *Множество $\mathbb{S}'$ всюду плотно в $\mathbb{S}$ в топологии равномерной сходимости внутри единичного круга, т. е. $\forall f\in\mathbb{S}\ \exists f_n\in\mathbb{S}'$ такие, что*

$$f(z)=\lim_{n\to\infty}f_n(z)$$

равномерно внутри единичного круга D.

Как следствие получается, что оценки коэффициентов в классе $\mathbb{S}$, например, оценки $|a_n|\le n$ и некоторые другие, достаточно доказать для $f\in\mathbb{S}'$. Поэтому вернемся к решению задачи Коши (1), (2), т. е. к функции $w=f(z,t)$, и к предельной функции $f\in\mathbb{S}'\subset\mathbb{S}$, определяемой соотношением

$$f(z)=\lim_{t\to\infty}e^t f(z,t)=z+c_2z^2+c_3z^3+...,|z|<1.$$

Ясно, что тейлоровские коэффициенты $w=f(z,t)$ можно выразить через $\kappa(t)$ и после предельного перехода найти формулы для коэффициентов $c_2,c_3,...,c_n,...$ предельной функции. Для этого будем в дальнейшем рассматривать $w=f(z,t)$ как функцию комплексной переменной z при фиксированном $t\in[0,\,t_0]$, $t_0<\infty$, и образуем функцию

$$g_{t_0}(z,\,t)=f\left(f^{-1}(z,\ t),\,t_0\right)=e^{t-t_0}\left(z+c_2(t,t_0)z^2+...\right),$$

которая удовлетворяет тождеству $g_{t_0}(f(z,t),\, t) = f(z,\, t_0)$ и, следовательно, второму дифференциальному уравнению Лёвнера

$$\frac{\partial g_{t_0}}{\partial t} = z\, \frac{\partial g_{t_0}}{\partial z}\, \frac{1+\kappa(t)\, z}{1-\kappa(t)\, z}, \qquad z \in D,\ t \in [0,\, t_0].$$

Подставляя в это уравнение разложение в ряд функции $g_{t_0}(z,\, t)$ и сравнивая при $n \geq 2$ коэффициенты в правой и левой частях получаемого равенства, приходим к формуле

$$\frac{d\, c_n(t,\, t_0)}{dt} = (n-1)\, c_n(t,\, t_0) + 2\sum_{j=1}^{n-1} j\, c_j(t,\, t_0)\, \kappa^{n-j}(t).$$

Интегрируем это линейное уравнение имея в виду, что $g_{t_0}(z,\, t_0) = z$, и поэтому $c_n(t_0,\, t_0) = 0$ при $n \geq 2$. Получаем

$$c_n(t,\, t_0) = -2\, e^{(n-1)t} \int_0^{t_0} e^{-(n-1)\tau}\ \sum_{j=1}^{n-1} j\, c_j(\tau,\, t_0)\, \kappa^{n-j}(\tau)\ d\tau.$$

На основании этой формулы тейлоровские коэффициенты функции $g_{t_0}(z,\, t)$ определяются последовательными вычислениями, а для коэффициентов предельной функции имеем

$$c_n = \lim_{t_0 \to \infty} c_n(0,\, t_0).$$

Несложные выкладки приводят к следующим формулам для второго и третьего коэффициентов. Справедлива

Теорема 5.3. (К. Лёвнер.) *Имеют место формулы*

$$c_2 = -2\int_0^{\infty} e^{-\tau}\kappa(\tau)d\tau$$

и

$$c_3 = -2\int_0^{\infty} e^{-2\tau}\kappa^2(\tau)d\tau + 4\left(\int_0^{\infty} e^{-\tau}\kappa(\tau)d\tau\right)^2.$$

Первая из этих формул позволяет легко получить уже знакомую нам оценку Бибербаха для второго коэффициента. Действительно, имеем

$$|c_2| \leq 2\int_0^{\infty} e^{-\tau}|\kappa(\tau)|d\tau = 2\int_0^{\infty} e^{-\tau}d\tau = 2(-e^{-\tau}|_0^{\infty}) = 2.$$

В дальнейшем нам понадобится еще один результат Лёвнера.

Теорема 5.4. (К. Лёвнер.) *В классе $\mathbb{S}$ имеем точную оценку $|c_3 - c_2^2| \le 1$.*

Доказательство. Непосредственные вычисления дают

$$|c_3 - c_2^2| = \left| -2 \int\limits_0^\infty e^{-2\tau} \kappa^2(\tau) d\tau \right| \le$$

$$\le 2 \int\limits_0^\infty e^{-2\tau} d\tau = \int\limits_0^\infty e^{-\tau} d\tau = 1.$$

С другой стороны, для функции Кёбе имеем: $a_2 = 2, a_3 = 3$. Поэтому $a_3 - a_2^2 = 3 - 4 = -1$, следовательно, полученная оценка точна и функция Кёбе является экстремальной.

5.3 Уравнение Лёвнера-Куфарева

Развитием и применениями теории Лёвнера занимались П. П. Куфарев, Г. М. Голузин, И. Е. Базилевич, Х. Поммеренке, В. В. Горяйнов и ряд других математиков.

В упрощенной формулировке приведем одно утверждение, восходящее к П. П. Куфареву и Х. Поммеренке, тесно связанное со вторым уравнением Лёвнера и позволяющее получать достаточные условия однолистности аналитических функций (см. подробности в [2], [34]).

Предположим, что в единичном круге $D = \{z : |z| < 1\}$ заданы аналитические функции $f_0(z)$, $f_1(z)$, $f(z,\, t)$, причем $f(z,\, t)$ непрерывно дифференцируема по параметру t при $0 \le t < \infty$ и $f(0,\, t) = 0$, $f'(0,\, t) \ne 0$, а $f_0(z)$ и $f_1(z)$ вложены в однопараметрическое семейтво $f(z,\, t)$ следующим образом:

$$f(z,\, 0) = f_0(z), \quad f(z,\, t) = a_1(t)\, f_1(z) + O(1),\ t \to \infty,$$

где $a_1(t)$ – положительная дифференцируемая функция со свойством

$$\lim_{t\to\infty} a_1(t) = \infty.$$

Через $h(z,\, t)$ обозначим функцию, определенную равенством

$$\frac{\partial f(z,\, t)}{\partial t} = z\, h(z,t)\, \frac{\partial f(z,\, t)}{\partial z}, \quad z \in D,\, 0 \le t < \infty.$$

Теорема 5.5. *Если*

$$\operatorname{Re} h(z,t) > 0, \qquad z \in D, \quad 0 \le t < \infty,$$

то все функции $f(z,\, t)$ однолистны в $D = \{z : |z| < 1\}$, в частности, однолистными являются и функции $f_0(z)$, $f_1(z)$.

5.4 Задачи и упражнения

1) Подтвердите результат Крауса-Нехари: пусть функция $w = f(z)$ является аналитической и однолистной в единичном круге D, тогда для всех $z \in D$ шварциан этой функции удовлетворяет неравенству

$$|\{f,\, z\}| \le \frac{6}{(1-|z|^2)^2},$$

причем постоянная 6 является точной.

Отметим, что эта теорема получена впервые В. Краусом в 1932 году, но стала широко известной после статьи З. Нехари 1949 года, где он переоткрыл этот результат и доказал достаточные условия однолистности в терминах шварциана (см. ниже задачу 6).

Указание. При произвольном, но фиксированном $z \in D$ рассмотрим преобразование Кёбе

$$g(\zeta) = \frac{f(\frac{\zeta+z}{1+\bar{z}\zeta}) - f(z)}{(1-|z|^2)f'(z)} = \zeta + a_2(g)\zeta^2 + a_3(g)\zeta^3 + ..., |\zeta| < 1.$$

Поскольку $g(\zeta) \in \mathbb{S}$, то по теореме Лёвнера имеет место точная оценка

$$|a_3(g) - a_2^2(g)| \le 1.$$

Непосредственными вычислениями показываем, что

$$6\left(a_3(g) - a_2^2(g)\right) = \{f,\, z\}\,(1-|z|^2)^2.$$

2) Пусть $F \in \mathbf{\Sigma}$, тогда

$$|\{F,\, \zeta\}| \le \frac{6}{(|\,\zeta|^2-1)^2}, \qquad |\zeta| > 1.$$

Указание. Найдется постоянная c такая, что $F(\zeta) - c \ne 0$. Тогда для функции

$$f(z) = \frac{1}{F(1/z) - c}$$

справедливо неравенство Нехари, равносильное доказываемому.

Вычисления достаточно проводить для функции

$$g(1/\zeta) = F(\zeta),$$

так как в силу инвариантности шварциана относительно дробно-линейных преобразований имеет место равенство

$$\{g,\, z\} = \{f,\, z\}.$$

3) Пусть $f_0 \in \mathbb{S}^*$. Покажите, что однопараметрическое семейство функций $f(z,t) = e^t\, f_0(z)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 5.5.

4) Докажите теорему Й. Беккера: если функция $f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots$ является аналитической в единичном круге D и удовлетворяет неравенству

$$\left| z\, \frac{f''(z)}{f'(z)} \right| \le \frac{1}{1 - |z|^2}, \quad |z| < 1,$$

то $f(z)$ однолистна в D.

Указание. Рассмотрите однопараметрическое семейство вида

$$f(z,t) = f(e^{-t} z) + (e^t - e^{-t})\, f'(e^{-t} z).$$

5) Получите следующее утверждение как следствие теоремы Й. Беккера: если функция $f(z)$ является аналитической в полуплоскости $\Pi = \{z = x + iy : y > 0\}$ и удовлетворяет неравенству

$$\left| \frac{f''(z)}{f'(z)} \right| \le \frac{1}{2\, y}, \quad y > 0,$$

то $f(z)$ однолистна в Π.

6) Докажите теорему З. Нехари: если функция $f(z)$ является аналитической в единичном круге D и удовлетворяет неравенству

$$|\{f,\, z\}| \le \frac{2}{(1 - |z|^2)^2}, \quad |z| < 1,$$

то $f(z)$ однолистна в D.

Указание. Убедитесь, что функцию $f(z)$ с известным шварцианом можно представить в виде

$$f(z) = \frac{g_1(z)}{g_2(z)},$$

где $g_1(z)$ и $g_2(z)$ – линейно независимые решения линейного дифференциального уравнения второго порядка

$$g'' + \frac{\{f,\, z\}}{2} g = 0.$$

Рассмотрите однопараметрическое семейство функций вида

$$f(z,t) = \frac{g_1(e^{-t}z) + (e^t - e^{-t})\, g_1'(e^{-t}z)}{g_2(e^{-t}z) + (e^t - e^{-t})\, g_2'(e^{-t}z)}.$$

7) Получите неравенство, доказанное одновременно и независимо друг от друга немецким математиком Р. Кюнау и автором настоящего учебного пособия:

пусть $f \in \mathbb{S}^0$, тогда

$$|\{f,\, z\}| \leq \frac{2}{(1 - |z|^2)^2},$$

причем постоянная 2 является точной.

Глава 6

Теория Литтлвуда о подчиненных функциях

6.1 Определение подчиненности и теорема Литтлвуда

Пусть $D = \{z : |z| < 1\}$ – единичный круг, $\Phi(z), \Psi(z)$ – голоморфные функции, заданные в этом круге.

Определение. Говорят, что $\Phi(z)$ подчинена функции $\Psi(z)$ и пишут

$$\Phi \prec \Psi,$$

если существует функция $\omega(z)$, голоморфная в D и удовлетворяющая условиям: $\omega(0) = 0$, $|\omega(z)| < 1$ для всех $z \in D$ и

$$\Phi(z) = \Psi(\omega(z)) \qquad \forall z \in D.$$

К этому определению можно дать следующие пояснения. Полезно помнить, что по лемме Шварца для функции $\omega(z)$ справедлива точная оценка: $|\omega(z)| \leq |z|$ для любой точки $z \in D$. Далее, голоморфная функция подчинена самой себе, так как можно взять $\omega(z) \equiv z$ в определении. Кроме того, если Ψ – однолистная функция, то в определении можно обойтись без функции $\omega(z)$ и говорить, что $\Phi(z)$ подчинена функции $\Psi(z)$ при выполнении условий: $\Phi(0) = \Psi(0)$ и $\Phi(D) \subset \Psi(D)$.

Теорема 6.1. (Теорема Дж. Литтлвуда.) *Пусть функции* Φ, Ψ *голоморфны в* D *и* $\Phi \prec \Psi$. *Тогда для любого* $\rho \in (0,1)$

$$\int\limits_0^{2\pi} |\Phi(\rho e^{i\theta})|^2 d\theta \leq \int\limits_0^{2\pi} |\Psi(\rho e^{i\theta})|^2 d\theta.$$

Доказательство. Фиксируем положительное число $\rho \in (0,1)$. Возьмем некоторое число $r \in (\rho, 1)$. Рассмотрим в единичном круге квадраты голоморфных функций $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$.

Поскольку $\Phi^2(z), \Psi^2(z)$ также голоморфны в D, то их вещественные и мнимые части являются гармоническими функциями. Поэтому к функциям $\mathrm{Re}\Psi^2(z) = u(x,y)$, $\mathrm{Im}\Psi^2(z) = v(x,y)$ применимы формулы Пуассона. Записывая их для суммы $u(x,y) + iv(x,y)$, получаем следующую формулу Пуассона для голомофной функции:

$$\Psi^2(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \Psi^2(\zeta) \ \mathrm{Re}\ \frac{\zeta + z}{\zeta - z}\, d\theta \qquad (\zeta = re^{i\theta},\ r \in (0,1)),$$

для любой точки $z = \rho e^{i\varphi}$, $0 < \rho < r$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Поэтому

$$\Phi^2(z) = \Psi^2(\omega(z)) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \Psi^2(\zeta) \ \mathrm{Re}\ \frac{\zeta + \omega(z)}{\zeta - \omega(z)} d\theta \qquad (\zeta = re^{i\theta}).$$

Простые оценки с учетом соотношений $|z| = \rho < r$, $|\omega(z)| \leq |z|$ приводят к неравенству

$$|\Phi(\rho e^{i\varphi})|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} |\Psi(re^{i\theta})|^2 \ \mathrm{Re}\ \frac{re^{i\theta} + \omega(\rho e^{i\varphi})}{re^{i\theta} - \omega(\rho e^{i\varphi})} d\theta,$$

где реальная часть дроби под интегралом взята без знака модуля, так как она положительна в силу того, что

$$\mathrm{Re}\ \frac{\zeta + z}{\zeta - z} > 0$$

при условии $|z| = \rho < r = |\zeta|$.

Проинтегрируем полученное неравенство для функций $\Phi^2(z), \Psi^2(z)$ при фиксированном $\rho \in (0,1)$. Имеем

$$\int\limits_0^{2\pi} |\Phi(\rho e^{i\varphi})|^2 d\varphi \leq \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} |\Psi(re^{i\theta})|^2 d\theta \int\limits_0^{2\pi} \mathrm{Re}\ \frac{re^{i\theta} + \omega(\rho e^{i\varphi})}{re^{i\theta} - \omega(\rho e^{i\varphi})} d\varphi.$$

К внутреннему интегралу применим теорему о среднем для гармонических функций, т. е. формулу

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} V(\rho e^{i\varphi})d\varphi = V(0) \qquad \left(V = \mathrm{Re}\ \frac{re^{i\theta}+\omega(\rho e^{i\varphi})}{re^{i\theta}-\omega(\rho e^{i\varphi})}\right),$$

Поскольку

$$V(0) = \mathrm{Re}\ \frac{re^{i\theta}+\omega(0)}{re^{i\theta}-\omega(0)} = \mathrm{Re}\frac{re^{i\theta}}{re^{i\theta}} = 1,$$

будем иметь равенство

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\Psi(re^{i\theta})|^2 d\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{Re}\ \frac{re^{i\theta}+\omega(\rho e^{i\varphi})}{re^{i\theta}-\omega(\rho e^{i\varphi})}\ d\varphi = \int_0^{2\pi} |\Psi(re^{i\theta})|^2 d\theta$$

для любых ρ, r, удовлетворяющих соотношениям $0 < \rho < r < 1$.

В результате получаем неравенство

$$\int_0^{2\pi} |\Phi(\rho e^{i\varphi})|^2 d\varphi \leq \int_0^{2\pi} |\Psi(re^{i\theta})|^2\ d\theta$$

для любых ρ, r таких, что $0 < \rho < r < 1$. Переходя к пределу при $r \to \rho$, приходим к утверждению теоремы.

6.2 Теоремы сравнения коэффициентов подчиненных функций

Теорема 6.2. *Пусть* $\Phi \prec \Psi$, *причем*

$$\Phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k z^k, \qquad \Psi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k z^k.$$

Тогда

$$\sum_{k=0}^{\infty} |A_k|^2 \leq \sum_{k=0}^{\infty} |B_k|^2.$$

Доказательство. По формуле Парсеваля для $|z| = r < 1$

$$\int_0^{2\pi} |\Phi(z)|^2 d\theta = \int_0^{2\pi} \Phi(z)\overline{\Phi(z)} d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} A_k r^k e^{ik\theta} \overline{A_k} r^k e^{-ik\theta} d\theta = 2\pi \sum_{k=0}^{\infty} |A_k|^2 r^{2k}.$$

Аналогично, имеем равенство

$$\int_0^{2\pi} |\Psi(z)|^2 d\theta = 2\pi \sum_{k=0}^{\infty} |B_k|^2 r^{2k}.$$

Применяя теорему Литтлвуда, получаем при любом $r \in (0, 1)$

$$\sum_{k=0}^{\infty} |A_k|^2 r^{2k} \le \sum_{k=0}^{\infty} |B_k|^2 r^{2k}.$$

Остается устремить r к единице.

На самом деле из теоремы Литтлвуда можно получить следующую счетную серию неравенств для коэффициентов A_k, B_k:

$$|A_0| \le |B_0|,$$

$$|A_0|^2 + |A_1|^2 \le |B_0|^2 + |B_1|^2,$$

$$|A_0|^2 + |A_1|^2 + |A_3|^2 \le |B_0|^2 + |B_1|^2 + |B_3|^2,$$

$$|A_0|^2 + |A_1|^2 + |A_3|^2 + |A_4|^2 \le |B_0|^2 + |B_1|^2 + |B_3|^2 + |B_4|^2,$$

и аналогичные неравенства для любого числа слагаемых. А именно, справедлива следующая

Теорема 6.3. (Теорема В. Рогозинского.) *Пусть*

$$\Phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k z^k, \qquad \Psi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k z^k$$

– голоморфные функции в единичном круге D, и пусть

$$\Phi \prec \Psi.$$

Тогда для любого натурального числа n и при $n = 0$ имеет место неравенство

$$\sum_{k=0}^{n} |A_k|^2 \leq \sum_{k=0}^{n} |B_k|^2.$$

Доказательство. Равенство $\Phi(z) = \Psi(\omega(z))$, где $\omega(z)$ – голоморфная функция, удовлетворяющая условию $|\omega(z) \leq |z|$, равносильно равенству рядов

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \omega^k(z),$$

или, что то же самое,

$$\sum_{k=0}^{n} A_k z^k + \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} A_k z^k - \sum_{k=n+1}^{\infty} B_k \omega^k(z) \right) = \sum_{k=0}^{n} B_k \omega^k(z)$$

Поскольку вблизи нуля функция $\omega(z)$ имеет разложение

$$\omega(z) = a_1 z + a_2 z^2 + ... = z(a_1 + a_2 z + ...),$$

выражение в больших круглых скобках представимо степенным рядом вида

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} C_k z^k.$$

Следовательно, имеем равенство

$$\sum_{k=0}^{n} A_k z^k + \sum_{k=n+1}^{\infty} C_k z^k = \sum_{k=0}^{n} B_k \omega^k(z),$$

что согласно определению подчиненных функций означает

$$\sum_{k=0}^{n} A_k z^k + \sum_{k=n+1}^{\infty} C_k z^k \prec \sum_{k=0}^{n} B_k z^k.$$

Поэтому к функциям

$$\Phi_1(z) = \sum_{k=0}^{n} A_k z^k + \sum_{k=n+1}^{\infty} C_k z^k$$

и

$$\Psi_1(z) = \sum_{k=0}^{n} B_k z^k$$

применимо следствие теоремы Литтлвуда. Будем иметь

$$\sum_{k=0}^{n} |A_k|^2 + \sum_{k=n+1}^{\infty} |C_k|^2 \le \sum_{k=0}^{n} |B_k|^2,$$

отсюда следует

$$\sum_{k=0}^{n} |A_k|^2 \le \sum_{k=0}^{n} |B_k|^2,$$

что и требовалось доказать.

6.3 Понятие квазиподчиненности и его применения

Определение. Пусть $D = \{z : |z| < 1\}$ – единичный круг, $\Phi(z), \Psi(z)$ – голоморфные функции, заданные в этом круге. Говорят, что функция $\Phi(z)$ является квазиподчиненной функции $\Psi(z)$, если для всех $z \in D$ справедливо равенство

$$\Phi(z) = \varphi(z)\Psi(\omega(z)),$$

где функции ω и φ голоморфны в D, причем $|\omega(z)| \le |z|$ и $|\varphi(z)| \le 1$ для всех точек $z \in D$.

Выделим важный частный случай квазиподчиненности: если функции $\Phi(z), \Psi(z)$ голоморфны в единичном круге и для всех $z \in D$ выполняется неравенство

$$|\Phi(z)| \le |\Psi(z)|,$$

то, очевидно, функция $\Phi(z)$ является квазиподчиненной функции $\Psi(z)$.

Проверьте, что теоремы Литтлвуда и Рогозинского о подчиненных функциях справедливы и для квазиподчиненных функций, причем схемы доказательств этих теорем для квазиподчиненных остаются теми же, что и для подчиненных функций. Впервые эти факты были установлены в работах Дж. Клуни для функций с условием $|\Phi(z)| \le |\Psi(z)|$ и М. С. Робертсона в общем случае. Термин "квазиподчиненность" также предложен М. С. Робертсоном (см. монографию Х. Поммеренке [34]).

Теоремы Литтлвуда и Рогозинского о подчиненных функциях и их аналоги для квазиподчиненных функций имеют многочисленные применения в геометрической теории функций. В качестве примера докажем следующее утверждение об оценках коэффициентов выпуклых функций.

Теорема 6.4. *Пусть* $f(z) = z + a_2 z^2 + ... \in \mathbb{S}^0$. *Тогда* $|a_n| \le 1$ *для всех* $n \ge 2$.

Доказательство. Из условия $f \in \mathbb{S}^0$ следует, что

$$\mathrm{Re}\left[1 + z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right] > 0, z \in D.$$

Обозначим

$$P(z) = 1 + z\frac{f''(z)}{f'(z)}$$

и заметим, что дробь

$$Q = \frac{P-1}{P+1}$$

определяет конформное отображение правой полуплоскости $\mathrm{Re}\,P > 0$ на единичный круг $|Q| < 1$, следовательно,

$$|Q(z)| = \left|\frac{P(z)-1}{P(z)+1}\right| < 1, \quad z \in D.$$

Поскольку $Q(0) = 0$, по лемме Шварца имеем $|Q(z)| \le |z|$, что равносильно неравенству $|P(z) - 1| \le |zP(z) + z|$, и в конечном счете – неравенству

$$|f''(z)| \le |2f'(z) + zf''(z)|.$$

Таким образом, функция $f''(z)$ квазиподчинена функции $2f'(z)+zf''(z)$. Вычислим тейлоровские коэффициенты этих функций и применим к ним обобщенную теорему Рогозинского. Имеем

$$f'(z) = 1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + ..., \qquad f''(z) = 2a_2 + 2 \cdot 3a_3 z + ...,$$

и поэтому

$$2f'(z) + zf''(z) =$$

$$= 2 + \sum_{n=2}^{\infty} 2na_n z^{n-1} + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)z^{n-1}a_n = 2 + \sum_{n=2}^{\infty} n(n+1)z^{n-1}a_n.$$

Записывая неравенство Рогозинского для коэффициентов, получаем

$$4|a_2|^2 + 2^2 \cdot 3^2 |a_3|^2 + ... + n^2(n+1)^2 |a_{n+1}|^2 \le$$

$$\leq 4 + 2^2 \cdot 3^2 |a_2|^2 + ... + n^2 (n+1)^2 |a_n|^2. \tag{6.1}$$

Искомую оценку коэффициентов доказываем теперь методом математической индукции. Базой индукции можно взять известное неравенство $|a_2| \leq 1$. Предположим, что $|a_2| \leq 1, ..., |a_n| \leq 1$. Тогда из (6.1) следует, что $|a_{n+1}| \leq 1$. Действительно, перенеся первые n слагаемых в (6.1) в правую часть и применяя неравенства $|a_2| \leq 1$, ... , $|a_n| \leq 1$, получаем

$$n^2(n+1)^2 |a_{n+1}|^2 \leq$$

$$\leq 4 + (2^2 \cdot 3^2 - 4)|a_2|^2 + (3^2 \cdot 4^2 - 2^2 \cdot 3^2)|a_3|^2 + ... + (n^2(n+1)^2 - (n-1)^2 n^2)|a_n|^2 \leq$$

$$\leq 4 + (2^2 \cdot 3^2 - 2^2) + (3^2 \cdot 4^2 - 2^2 \cdot 3^2) + ... + (n^2(n+1)^2 - (n-1)^2 n^2) = n^2(n+1)^2.$$

Таким образом, пришли к оценке $n^2(n+1)^2|a_{n+1}|^2 \leq n^2(n+1)^2$, которая немедленно влечет требуемое неравенство $|a_{n+1}| \leq 1$. Этим и завершается доказательство теоремы.

6.4 О гипотезах Рогозинского и Милина

В. Рогозинский доказал следующее обобщение теоремы 6.4: пусть задана голоморфная функция $f(z) = z + a_2 z^2 + ..., |z| < 1$. Если f подчинена некоторой функции $g \in \mathbb{S}^0$, то $|a_n| \leq 1, n = 2, 3, ...$

В 1943 году он выдвинул следующую обобщенную гипотезу Бибербаха: пусть задана голоморфная функция $f(z) = z + a_2 z^2 + ..., |z| < 1$. Если f подчинена некоторой функции $g \in \mathbb{S}$, то $|a_n| \leq n, n = 2, 3, ...$

Обобщенная гипотеза Бибербаха также оказалась верной, так как она следует из более общей гипотезы, высказанной в 1967 году И. М. Милиным и доказанной в 1985 году Л. де Бранжем с использованием изложенной выше теории Левнера.

Для полноты информации сформулируем здесь гипотезу Милина: пусть $f \in \mathbb{S}$, и пусть γ_n – так называемые логарифмические коэффициенты, определенные соотношением

$$\ln \frac{f(z)}{z} = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n z^n, \quad |z| < 1.$$

Тогда для любого натурального числа n справедливы неравенства

$$\sum_{m=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \left(k|\gamma_k|^2 - \frac{1}{k} \right) \leq 0.$$

Отметим также, что различные гипотезы и методы оценки коэффициентов наиболее полно изложены в монографии [24], написанной за несколько лет до появления статьи Л. де Бранжа. Более подробную информацию о различных подтвержденных и опровергнутых гипотезах, их взаимосвязи можно найти в нескольких публикациях, например, в статье И. А. Александрова и И. М. Милина [4] и в главе 2 книги автора и К.-Й. Вирса [20].

В заключение приведем одно полезное обозначение. Для двух функций, голоморфных в некоторой окрестности нуля и имеющих там разложение

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \quad g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k,$$

пишут

$$f(z) << g(z)$$

тогда и только тогда, когда для всех тейлоровских коэффициентов верны неравенства

$$|a_k| \leq |b_k|.$$

Так, например, гипотезу Бибербаха можно записать в виде следующего утверждения:

если $f \in \mathbb{S}$, то $f(z) << z/(1-z)^2$.

6.5 Задачи и упражнения

1) Пусть выполнены условия теоремы Рогозинского. Можно ли утверждать для $k \geq 1$, что

$$|A_k| \leq |B_k|?$$

Указание. Ищите контрпримеры.

2) Пользуясь схемой доказательства теоремы 6.4, докажите следующее утверждение:

если $f(z) = z + a_2 z^2 + ... \in \mathbb{S}^*$, то справедливы точные оценки $|a_n| \leq n$ для всех $n \geq 2$.

3) Пусть $\gamma \in (-\pi/2, \pi/2)$ – фиксированное число. Говорят, что f является однолистной, γ-спиралеобразной функцией и пишут $f \in \mathbb{S}^*_\gamma$, если $f \in \mathbb{S}$ и для всех $z \in D$ выполняется неравенство

$$\mathrm{Re}\left(e^{i\gamma}\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > 0.$$

Выясните, каким характеристическим свойством обладает образ единичного круга $f(D)$ для функции $f \in \mathbb{S}^*_\gamma$.

Найдите точные оценки для коэффициентов функций класса $\mathbb{S}^*_\gamma$, пользуясь схемой доказательства теоремы 6.4.

4) Пусть однопараметрическое семейство функций $f(z,t)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 5.5, и пусть $0 < t_1 < t_2 < \infty$. Покажите, что $f(z,t_1)$ подчинена функции $f(z,t_2)$.

5) Пусть $D = \{z : |z| < 1\}$ – единичный круг, $\Phi(z), \Psi(z)$ – голоморфные функции, заданные в этом круге, и $\Phi \prec \Psi$. Докажите следующее утверждение: для любого $\rho \in (0,1)$

$$\int\limits_0^{2\pi} |\mathrm{Re}\ \Phi(\rho e^{i\theta})|\ d\theta \le \int\limits_0^{2\pi} |\mathrm{Re}\ \Psi(\rho e^{i\theta})|\ d\theta.$$

6) Пусть функция $P(z) = 1 + a_1 z + a_2 z^2 + ...$ голоморфна в единичном круге $D = \{z : |z| < 1\}$ и удовлетворяет там неравенству $\mathrm{Re}\, P(z) > 0$. Докажите, что $P(z) << (1+z)/(1-z)$.

7) Пусть α и c – постоянные, $\alpha \ge 1$, $|c| \le 1$, $c \ne -1$. Докажите следующее утверждение из [20], с. 24:

$$\frac{1}{c+1}\left(\left(\frac{1+cz}{1-z}\right)^\alpha - 1\right) << \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^\alpha - 1\right).$$

Глава 7

Методы симметризации

7.1 Симметризация областей относительно прямой

Давно было известно, что классическое изопериметрическое неравенство достаточно установить для выпуклых областей на плоскости. Этот факт основан на следующих, весьма простых соображениях. Пусть дана невыпуклая область, ограниченная спрямляемой кривой. Рассмотрим выпуклую оболочку этой области. Очевидно, площадь выпуклой оболочки больше, чем площадь самой невыпуклой области, а длина границы – меньше. Действительно, при переходе к выпуклой оболочке некоторые граничные дуги заменяются на отрезки прямых, соединяющих концы этих дуг. А в геометрии Евклида отрезки прямых представляют собой геодезические линии, соединяющие две заданных точки кратчайшим путем.

Утонченное и обобщающее развитие этой идеи было найдено математиками еще в XIX веке. Речь идет о специальных преобразованиях плоских и пространственных областей под названием симметризация. К настоящему времени придумано много полезных операций такого вида. Начнем их изучение с простейшего случая – с симметризации областей относительно прямой на плоскости.

Итак, пусть имеется ограниченная область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Будем рассматривать симметризацию области Ω относительно оси абсцисс на плоскости с заданной декартовой системой координат. Это означает, что исходя из области Ω строится новая область Ω^*, симметричная относительно оси абсцисс Ox, по следующим правилам.

Абсциссы точек, лежащих в области, заполняют некоторый интервал (a, b) оси Ox. Пересечение области Ω с прямой $x = x_1 \in (a, b)$ состоит из

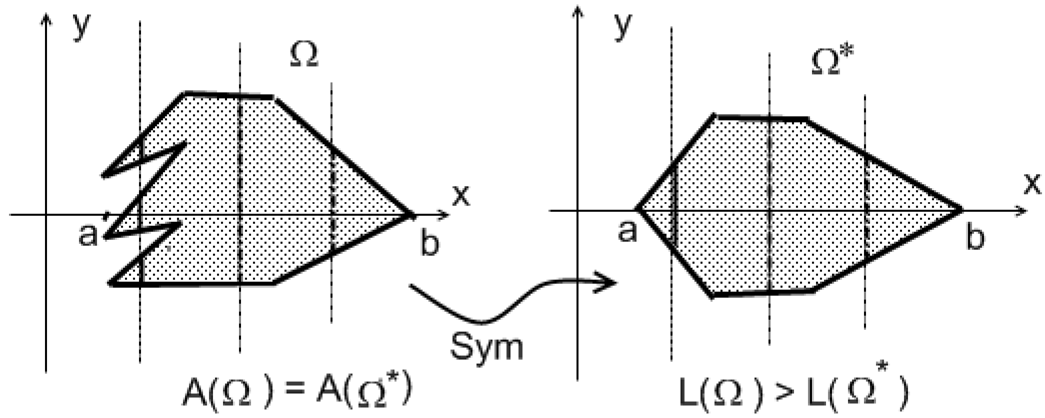

Рис. 7.1: Симметризация относительно прямой

конечного или бесконечного (но счетного) множества интервалов конечной суммарной длины $\sum l_k = y_1$. Объединение по всем $x_1 \in (a,\, b)$ прямолинейных интервалов вида $(z_1,\, \overline{z}_1)$, где $z_1 = x_1 + iy_1/2$ и $\overline{z}_1 = x_1 - iy_1/2$, и составляет искомую область Ω^*, симметричную относительно оси абсцисс Ox.

Рассмотрим два примера.

Пример 1. Пусть $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1,\, y > 0\}$ – полукруг. Пересечение области Ω с прямой $x = x_1 \in (-1,\, 1)$ состоит из одного интервала длины $y_1 = \sqrt{1 - x_1^2}$. Соответствующий симметризованный интервал имеет концы в точках $(x^*,\, y^*)$, $(x^*,\, -y^*)$, причем

$$x^* = x_1, \quad y^* = \frac{y_1}{2}.$$

Поскольку $x_1^2 + y_1^2 = 1$, то $(x^*)^2 + (y^*)^2/(0,5)^2 = 1$. Таким образом, область Ω^* представляет собой внутренность эллипса с уравнением

$$x^2 + 4y^2 = 1.$$

Пример 2. Пусть $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < a,\, 0 < y < b,\, x/a + y/b < 1\}$ – прямоугольный треугольник с гипотенузой $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. В результате симметризации относительно оси ординат получаем равнобедренный треугольник со сторонами $a^* = a$, $b^* = c^* = \sqrt{b^2 + a^2/4}$. Очевидно, эти два треугольника имеют одинаковую площадь. Кроме того, имеет место следующее соотношение для периметров треугольников

$$a + b + c > a^* + b^* + c^*,$$

равносильное легко проверяемому неравенству $b + \sqrt{a^2 + b^2} > \sqrt{4b^2 + a^2}$.

Указанные во втором примере свойства площадей и периметров при симметризации являются знаковыми. А именно, оказывается справедливой следующая теорема.

Теорема 7.1. *При симметризации плоской области относительно прямой площадь инвариантна, а длина границы может разве лишь уменьшиться, т. е.*

$$A(\Omega) = A(\Omega^*), \qquad L(\Omega) \geq L(\Omega^*).$$

Инвариантность площади является следствием геометрических построений при симметризации и определения интеграла Лебега. Поэтому необходимо понять лишь неравенство $L^* \leq L$. Для простоты рассмотрим случай, когда граница области состоит из графиков двух непрерывно дифференцируемых функций, причем область Ω ограничена сверху графиком функции $y = y_1(x)$, а снизу – графиком функции $y = y_2(x)$. Тогда длина границы области определяется формулой

$$L = L_1 + L_2 = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy_1}{dx}\right)^2} dx + \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy_2}{dx}\right)^2} dx.$$

Граница симметризованной области определяется графиками функций $y = y(x)$, $y = -y(x)$, где

$$y(x) = \frac{y_1(x) - y_2(x)}{2}.$$

Тогда длина границы симметризованной области равна

$$L^* = L_1^* + L_2^* = 2L_1^* = 2\int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_a^b \sqrt{4 + (y_1'(x) - y_2'(x))^2} dx.$$

Оценим подинтегральную функцию, применяя неравенство треугольника $|w_1 + w_2| \leq |w_1| + |w_2|$ к сумме комплексных чисел $w_1 = 1 + iy_1'$ и $w_2 = 1 - iy_2'$. Будем иметь: $\forall x \in [a, b]$

$$\sqrt{4 + (y_1'(x) - y_2'(x))^2} = |2 + i(y_1'(x) - y_2'(x))| = |w_1 + w_2| \leq$$
$$\leq |w_1| + |w_2| = \sqrt{1 + y_1'(x)^2} + \sqrt{1 + y_2'(x)^2}.$$

Следовательно,

$$L^* = \int_a^b \sqrt{4 + (y_1'(x) - y_2'(x))^2} dx \leq \int_a^b \left(\sqrt{1 + y_1'(x)^2} + \sqrt{1 + y_2'(x)^2}\right) dx = L,$$

что и требовалось доказать.

7.2 Симметризация Штейнера в пространстве

Симметризация Штейнера ограниченной пространственной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ относительно некоторой заданной плоскости П строится аналогично плоскому случаю. А именно, пусть, например, П – плоскость xOy, ω – проекция Ω на эту плоскость. Перпендикуляр к П, проходящий через точку $(x_1, y_1) \in \omega$, пересекает Ω по множеству конечной длины $z_1 = \sum l_k$. По определению, симметризованная область

$$\Omega^* = \{(x_1, y_1, z) \in \mathbb{R}^3 : \ (x_1, y_1) \in \omega, \ -z_1/2 < z < z_1/2\}.$$

Через V обозначим объем области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Предположим, что эта область ограничена кусочно-гладкой поверхностью площади S. Пусть V^* и S^* – объем и площадь, соответственно, области $\Omega^* \subset \mathbb{R}^3$, полученной симметризацией по Штейнеру относительно некоторой плоскости. По аналогии с теоремой 7.1 доказывается

Теорема 7.2. *При симметризации по Штейнеру пространственной области относительно плоскости объем области инвариантен, а площадь границы может разве лишь уменьшиться, т. е.*

$$V^* = V, \qquad S^* \leq S.$$

Различные методы симметризации успешно применяются при исследование задач математической физики для оценки физических величин (функционалов области), таких как основная частота колеблющейся мембраны, жесткость кручения упругой балки, расход жидкости при подземных течениях. Эти величины, как правило, связаны с решениями краевых задач или вариационных проблем математической физики и представляют собой нормы некоторых операторов вложения в пространствах Соболева. Поэтому естественно возникает необходимость одновременной симметризации областей и заданных в них функций.

7.3 Симметризация Шварца

Для иллюстрации рассмотрим кратко симметризацию по Шварцу. Пусть задана ограниченная область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Для Ω весьма просто определяется симметризованная область: $\Omega^* \subset \mathbb{R}^2$ как круг с центром в начале координат и имеющий ту же площадь, что и исходная область Ω.

Пусть имеется непрерывная функция $U : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$. Рассмотрим множества

$$\Omega(\mu) = \{x \in \Omega : U(x) \geq \mu\}, \qquad \mu \in \mathbb{R}.$$

Поскольку

$$M := \| U(x) \| < \infty,$$

то, очевидно, $\Omega(\mu) = \varnothing$ для значений $\mu > M$. Соответствующая $U : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ симметризованная функция $U^* : \Omega^* \to \mathbb{R}$ определяется следующим образом:

$$U^*(x) = \sup\{\mu : x \in \Omega(\mu)^*\},$$

где $\Omega(\mu)^*$ – круг с центром в начале координат, имеющий ту же площадь, что и область $\Omega(\mu)$. Из определения следует, что симметризованная функция является так называемой радиальной функцией, т.е. зависит лишь от $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. В полярных координатах

$$U^*(r, \theta_1) = U^*(r, \theta_2) \quad \forall \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}.$$

В силу определения интеграла Лебега для любой непрерывной функции $\psi : [-M,\, M] \to \mathbb{R}$ будем иметь равенство

$$\int\limits_{\Omega} \psi(U(x))dx = \int\limits_{\Omega^*} \psi(U^*(x))dx.$$

Симметризация Шварца естественным образом распространяется и на случай пространственных областей $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$. При этом симметризованная область $\Omega^* \subset \mathbb{R}^n$ – шар с центром в начале координат, имеющий тот же объем, что и исходная область Ω. Для непрерывной функции $U : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, как и в случае $n = 2$, определяются множества

$$\Omega(\mu) = \{x \in \Omega : U(x) \geq \mu\}, \qquad \mu \in \mathbb{R}.$$

и симметризованная функция

$$U^*(x) = \sup\{\mu : x \in \Omega(\mu)^*\},$$

определенная в шаре $\Omega^* \subset \mathbb{R}^n$. Для симметризации Шварца в плоском и пространственных случаях справедлива

Теорема 7.3. *Пусть область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ограничена кусочно-гладкой поверхностью (кривой при $n = 2$). Пусть, далее, функция $U : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ является неотрицательной и непрерывно дифференцируемой и обращается в нуль на границе области Ω. Тогда при симметризации по Шварцу для любой непрерывной функции $\psi : [-M, M] \to \mathbb{R}$ будем иметь*

$$\int\limits_{\Omega} \psi(U(x))dx = \int\limits_{\Omega^*} \psi(U^*(x))dx$$

и, кроме того,

$$\int\limits_{\Omega} |\nabla U|^2 dx \geq \int\limits_{\Omega^*} |\nabla U^*|^2 dx.$$

Теорема 7.3 используется для доказательства ряда изопериметрических неравенств математической физики. Приведем два классических утверждения такого вида.

Теорема 7.4. (Теорема Рэлея – Крана – Фабера.) *Среди всех мембран (плоских односвязных областей) с заданной площадью и закрепленными краями наибольшую основную частоту имеет круг.*

В рамках общепринятой математической модели теории звука речь идет о неравенстве

$$\frac{1}{\lambda_1(\Omega)} \leq \frac{1}{\lambda_1(D_\rho)},$$

где $\lambda_1(\Omega)$ и $\lambda_1(D_\rho)$ – первые собственные значения задачи Дирихле для уравнения Лапласа для односвязной плоской области Ω конечной площади и круга D_ρ той же площади, соответственно. Из курса математической физики известно следующее вариационное определение первого собственного значения:

$$\frac{1}{\lambda_1(\Omega)} = \sup_{u \in C_0^\infty(\Omega)} \frac{\iint\limits_{\Omega} |u|^2 dx\, dy}{\iint\limits_{\Omega} |\nabla u|^2 dx\, dy},$$

где $C_0^\infty(\Omega)$ – множество гладких, вещественнозначных функций $u = u(x, y)$ с компактными носителями, лежащими в области Ω.

Теорема 7.5. (Теорема Сен-Венана – Полиа.) *Среди всех плоских односвязных областей (поперечных сечений упругих балок) с заданной площадью наибольшую жесткость кручения имеет круг.*

Вариационное определение жесткости $P(\Omega)$ кручения таково:

$$P(\Omega) = \sup_{u \in C_0^\infty(\Omega)} \frac{4\left(\iint\limits_{\Omega} |u| dx\, dy\right)^2}{\iint\limits_{\Omega} |\nabla u|^2 dx\, dy}.$$

Доказательства двух последних теорем, связанные с ними исторические сведения и развитие теории подобных проблем можно найти в книгах [9], [21], [1]. Следует отметить, что изложенные в этой главе понятия и факты стали уже классикой. Читателю, желающему познакомиться с развитием методов симметризации, с современными подходами в теории симметризации и их применениями в геометрической теории функций, я рекомендую посмотреть статью В. Н. Дубинина [8].

7.4 Задачи и упражнения

1) Методами элементарной математики докажите два следующих утверждения:

1.1) среди всех прямоугольников с заданным периметром наибольшую площадь имеет квадрат;

1.2) правильный треугольник имеет наибольшую площадь среди всех треугольников заданного периметра.

2) Постройте трехмерную область, площадь поверхности которой больше площади поверхности ее выпуклой оболочки.

Указание. Рассмотрите трехмерное тело типа волчка с достаточно длинным центральным стержнем.

3) Пользуясь схемой доказательства теоремы 7.1, докажите утверждение $S \geq S^*$ теоремы 7.2.

Указание. Если доказательство не получается, то обратитесь к книге [9] или [21].

4) Покажите, что при симметризации по Штейнеру имеют место следующие простые правила:

если $\Omega_1 \subset \Omega_2$, то $\Omega_1^* \subset \Omega_2^*$;

если λ – положительная постоянная, то $(\lambda\Omega)^* = \lambda\Omega^*$;

если B – шар с центром на плоскости симметризации (или круг с центром на прямой симметризации), то $B^* = B$.

5) Покажите, что при симметризации по Штейнеру имеют место следующие неравенства для радиусов вписанного и описанного шаров:

$$r(\Omega^*) \geq r(\Omega)$$

и

$$R(\Omega^*) \leq R(\Omega).$$

В плоском случае речь идет о радиусах r и R кругов, вписанного в область и описанного вокруг области, соответственно.

6) Пусть Ω_1 и Ω_2 – две области,

$$\Omega_1 + \Omega_2$$

– сумма Минковского двух множеств, состоящая из всех точек c, которые можно представить как (векторные) суммы $a + b$ точек $a \in \Omega_1$ и $b \in \Omega_2$.

Докажите, что при симметризации по Штейнеру имеет место включение:

$$\Omega_1^* + \Omega_2^* \subset (\Omega_1 + \Omega_2)^*.$$

7) Пользуясь теоремой 7.3, докажите теоремы 7.4 и 7.5.

Указание. Если возникли затруднения, то обратитесь к книге [9] или [21].

Глава 8

Приложения конформных отображений

Конформные отображения имеют применения во многих прикладных задачах. Основные приложения связаны с краевыми задачами, возникающими при изучении сплошных сред различной физической природы, например, при описании характеристик течения жидкости, электрических или магнитных полей, распределения напряжений в упругой среде и других задачах сопротивления материалов и т. п. Поэтому фразу "рассмотрим метод конформных отображений" можно встретить в книгах для инженеров по различным областям науки.

Прежде чем перейти к рассмотрению примеров применения конформных отображений, вспомним необходимые базовые результаты, которые специалисты считают общеизвестными и оперируют с ними, как правило, без ссылок на первоисточники.

8.1 Об условиях непрерывности граничных значений

Базовая теорема о граничном соответствии при конформных отображениях, глубокие обобщения которой были установлены в классических работах К. Каратеодори, была сформулирована уже в первой главе (см. теорему 1.5). С учетом большого прикладного значения приведем формулировку этой теоремы здесь еще раз, акцентируя внимание на непрерывную продолжимость конформного отображения на границу области.

Пусть Ω *– односвязная область на плоскости, ограниченная замкнутой кривой Жордана* $\partial\Omega$ *(т. е. граница области является непрерывной замкну-*

той кривой без самопересечений). Пусть, далее, $f : D \to \Omega$ - конформное отображение единичного круга D на эту область. Тогда функция f непрерывно продолжима на замыкание единичного круга, и граничные значения $f(e^{i\theta})$ $(0 < \theta \leq 2\pi)$, полученные непрерывным продолжением, устанавливают взаимно однозначное соответствие между границами областей, т. е. между ∂D и $\partial\Omega$.

По традиции, сохраняют ту же букву f для обозначения продолженного отображения $f : \overline{D} \to \overline{\Omega}$. Существование продолжения означает, в частности, существование предела

$$\lim_{z \to e^{i\theta},\, |z|<1} f(z)$$

для любого вещественного числа θ.

Приведем также одну из широко используемых теорем о существовании непрерывного продолжения на границу производной конформного отображения — теорему Каллога, ученика Д. Гильберта.

Теорема 8.1. (O. D. Kellogg, 1912.) *Пусть Ω – односвязная область на плоскости, ограниченная замкнутой, гладкой кривой Жордана $\partial\Omega$, s — дуговая абсцисса $\partial\Omega$. Если угол касательной $\theta(s)$ к границе области удовлетворяет условию Гёльдера, т. е. $\forall s_1, s_2 \in \mathbb{R}^+$*

$$|\theta(s_1) - \theta(s_2)| \leq k\,|s_1 - s_2|^\alpha, \quad k > 0, \alpha \in (0,1],$$

то производная $f'(z)$ конформного отображения $f : D \to \Omega$ и $\ln f'(z)$ непрерывно продолжимы на замыкание $\overline{D}$ единичного круга, $\ln f'(z)$ удовлетворяет условию Гёльдера, т. е. $\forall z_1, z_2 \in \overline{D}$

$$|\ln f'(z_1) - \ln f'(z_2)| \leq k_1\,|z_1 - z_2|^\alpha, \quad k_1 > 0,$$

и, в частности, $f'(z) \neq 0$ в $\overline{D}$.

В заключение отметим, что теорема о соответствии границ и теорема Келлога, как теоремы существования непрерывных продолжений, имеют локальную природу и могут быть использованы для непрерывного продолжения конформного отображения или его производной на те дуги окружности, образы которых обладают необходимыми свойствами.

8.2 Конформно инвариантное интегральное неравенство

Производная конформного отображения $f : D \to \Omega$ естественно возникает при конформных заменах переменных в интегралах.

В комплексном анализе дифференциальный элемент длины дуги ds часто обозначают через $|dz|$, так как $|dz| = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = ds$. Аналогично, $|dw| = \sqrt{(du)^2 + (dv)^2} = d\sigma$. Поэтому

$$\frac{d\sigma}{ds} = \left|\frac{dw}{dz}\right| = |f'(z)|,$$

и при конформной замене переменных в криволинейных интегралах первого рода дифференциальные элементы длин дуг оказываются связанными следующей простой формулой:

$$d\sigma = |f'(z)| ds.$$

Обозначим $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, где $u(x, y), v(x, y)$ – вещественная и мнимая части функции $f : D \to \Omega$, и рассмотрим замену переменной $w = u + iv$ на $z = x + iy$ при связи $w = f(z)$ в двойном интеграле. Имеем

$$\iint\limits_{\Omega} F(w)\, du\, dv = \iint\limits_{D} F(f(z)) J\, dx\, dy.$$

Якобиан преобразования легко считается:

$$J = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = |f'(z)|^2,$$

так как в силу условий Коши-Римана

$$f'(z) = \frac{\partial f(x + iy)}{\partial x} = \frac{1}{i}\frac{\partial f(x + iy)}{\partial y} =$$
$$= \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Поэтому стандартная, часто используемая конформная замена переменных в двойном интеграле записывается так:

$$\iint\limits_{\Omega} F(w)\, du\, dv = \iint\limits_{D} F(f(z))|f'(z)|^2\, dx\, dy.$$

В качестве упражнения докажем одно полезное неравенство.

Теорема 8.2. (см. [1], с. 182-183.) *Пусть $g : \Omega \to D$ – однолистное конформное отображение области Ω на единичный круг D, где Ω – односвязная область на расширенной комплексной плоскости переменной $z = x + iy$. Тогда для любой функции $u \in C_0^\infty(\Omega)$*

$$\iint_{\Omega} |\nabla u(x, y)|^2\, dx\, dy \geq \iint_{\Omega} \frac{|u(x, y)|^2\, (2 - |g(z)|^2)}{(1 - |g(z)|^2)^2}\, |g'(z)|^2\, dx\, dy.$$

Если область Ω не содержит бесконечно удаленной точки, то, как следствие, получаем конформно инвариантное неравенство

$$\iint_\Omega |\nabla u(x,y)|^2\,dx\,dy \geq \iint_\Omega \frac{|u(x,y)|^2}{R_\Omega^2(z)}\;dx\,dy\;\;\forall u\in C_0^\infty(\Omega),$$

так как

$$\frac{(2-|g(z)|^2)}{(1-|g(z)|^2)^2}\,|g'(z)|^2 > \frac{|g'(z)|^2}{(1-|g(z)|^2)^2} = \frac{1}{R_\Omega^2(z)}.$$

Здесь $R_\Omega(z)$ – конформный радиус области Ω в точке z.

Доказательство теоремы 8.2. Достаточно рассмотреть случай, когда $u = u(x,y)$ – вещественнозначная функция. Обозначим $V = V(z) = \sqrt{1-|g(z)|^2}$. Сочетая первую формулу Грина

$$\iint_\Omega \left[u^2\,\Delta\ln V + (\nabla u^2,\,\nabla\ln V)\right]\,dx\,dy = 0$$

с простым неравенством

$$\iint_\Omega \left(|\nabla u|^2 - (\nabla u^2,\,\nabla\ln V) + u^2\,|\nabla\ln V|^2\right)\,dx\,dy =$$

$$= \iint_\Omega \left(\nabla u - u\,\nabla\ln V\right)^2\,dx\,dy \geq 0,$$

получаем

$$\iint_\Omega |\nabla u|^2\,dx\,dy \geq -\iint_\Omega u^2\left(\Delta\ln V\;+\;|\nabla\ln V|^2\right)\,dx\,dy.$$

Это и есть утверждение теоремы, так как непосредственные вычисления показывают, что

$$\Delta\ln V\;+\;|\nabla\ln V|^2 = \frac{\Delta V}{V} = \frac{4}{V}\,\frac{\partial^2 V}{\partial z\partial\overline{z}} = -\,\frac{2-|g(z)|^2}{(1-|g(z)|^2)^2}\,|g'(z)|^2.$$

8.3 Конформная "пересадка" краевых задач

Перейдем теперь к изложению некоторых применений конформных отображений в краевых задачах. В этом пункте опишем одну общую идею, а в следующем пункте схематично рассмотрим конкретную задачу, а именно, обратную краевую задачу теории крыла.

Одним из эффективных методов при решении краевых задач в сложно устроенной односвязной области является "пересадка" задачи с помощью конформной замены переменных на какую-нибудь простую область (единичный круг, полуплоскость, полукруг, внешность разреза, полоса, прямоугольник или какая-то иная, простая область с известной функцией Грина соответствующей краевой задачи). Для этого необходимо произвести замену переменных в дифференциальном уравнении, заданном внутри области, а также преобразовать граничные условия.

В качестве примера рассмотрим преобразование оператора Лапласа при конформной замене независимых переменных. Пусть $z = x + iy$, $\zeta = \xi + i\eta$, функция $\varphi(x, y)$ определена в области Ω_z, и пусть $f : \Omega_\zeta \to \Omega_z$ – однолистное конформное отображение области Ω_ζ плоскости переменной ζ на область Ω_z плоскости переменной z.

Предположим, что функция $\varphi(x, y)$ является дважды непрерывно дифференцируемой. Рассмотрим в области Ω_ζ переменной $\zeta = \xi + i\eta$ функцию $\Phi(\xi, \eta)$, определенную равенством

$$\Phi(\xi, \eta) = \varphi(x,\, y),$$

где

$$x = x(\xi,\, \eta) = \operatorname{Re} f(\xi + i\eta),\ \ y = y(\xi,\, \eta) = \operatorname{Im} f(\xi + i\eta).$$

Найдем связь между лапласианами

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}, \qquad \Delta\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial \eta^2}$$

двух функций, получаемых одна из другой конформной заменой независимых переменных.

Непосредственными вычислениями получаем

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\xi} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\xi} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\xi}$$

и

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi^2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\right)^2 + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)^2 + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\xi} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial\xi^2}.$$

Аналогично, будем иметь

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\eta^2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial\eta}\right)^2 + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial\eta^2} + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\eta} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial\eta}\right)^2 + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial\eta^2},$$

следовательно,

$$\Delta\Phi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}|f'(\zeta)|^2 + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}|f'(\zeta)|^2 + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial\eta^2}\right) + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial\eta^2}\right).$$

Это выражение упрощается с учетом того, что вещественная и мнимая части голоморфной функции являются гармоническими функциями, как следствие справедливы тождества

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 x}{\partial\eta^2}\right)\equiv 0, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 y}{\partial\eta^2}\right)\equiv 0.$$

Поэтому окончательная формула оказывается весьма простой, а именно, справедливо утверждение.

Теорема 8.3. *При конформной замене $z = f(\zeta)$ независимых переменных справедлива формула*

$$\Delta\Phi = |f'(z)|^2\,\Delta\varphi,$$

где $\Phi = \varphi\circ f$.

В частности, если $\Delta\varphi = 0$, то $\Delta\Phi = 0$. Таким образом, при конформной замене независимых переменных гармоническая функция остается гармонической. Отметим также, что конформная замена переменных успешно используется, например, в теории упругости для получения явного представления в рядах решений краевых задач. В качестве примера приведем формулу Давенпорта для интеграла от решения уравнения Пуассона $\Delta\varphi = -2$ при нулевых граничных значениях. В этой формуле звездочка над суммами означает, что суммирование распространяется на индексы, удовлетворяющие равенству $\alpha+\beta=\gamma+\delta$.

Теорема 8.4. (H. Davenport) *Пусть функция $z = f(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\zeta^n$, $|\zeta|<1$, осуществляет однолистное конформное отображение единичного круга на односвязную область Ω, содержащую начало координат и имеющую конечную площадь. Тогда для жесткости кручения Ω имеет место формула*

$$P(\Omega) = \frac{\pi}{2}\sum_{\alpha=1}^{\infty}\sum_{\beta=1}^{\infty}\sum_{\gamma=1}^{\infty}\sum_{\delta=1}^{\infty}{}^{*}\min\{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}a_\alpha a_\beta\overline{a_\gamma a_\delta},$$

где ряд абсолютно сходится.

Вывод этой формулы содержится в книге [9], где подчеркивается, что для абсолютной сходимости ряда необходимо какое-то дополнительное требование на область, причем конечность площади является одним из подходящих условий. Поэтому это требование и включено нами в формулировку теоремы.

8.4 Обратная краевая задача теории крыла

На расширенной комплексной плоскости переменной $z = x + iy$ рассмотрим область Ω_z^- (внешность некоторого связного компакта K), содержащую бесконечно удаленную точку и ограниченную кусочно-гладкой кривой L_z.

Предположим, что в этой области имеется потенциальное векторное поле $(v_x, v_y) = \vec{v}$ с потенциалом $\varphi(x, y)$, удовлетворяющим уравнению Лапласа

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0$$

и граничному условию Неймана на $\partial\Omega_z^-$:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0.$$

Пусть $\psi(x, y)$ – сопряженная к $\varphi(x, y)$ гармоническая функция, тогда функция $w(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$, где $z = x + iy$, называется комплексным потенциалом.

Зная область Ω_z^-, мы можем найти потенциал $\varphi(x, y)$ как решение краевой задачи для уравнения Лапласа с указанным условием Неймана (для единственности, как известно, нужны некоторые дополнительные условия). Тогда в Ω_z^- определится векторное поле по формулам

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = v_x, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = v_y.$$

Приведенная задача представляет собой простую модель из теории крыла: K – поперечное сечение так называемого крыла бесконечного размаха, обтекаемого стационарным, плоскопараллельным потоком идеальной несжимаемой жидкости, векторное поле $(v_x, v_y) = \vec{v}$ – поле скоростей течения вокруг крыла, однородное граничное условие Неймана – условие непроницаемости контура крыла L_z. Потенциал и его частные производные оказываются непрерывно продолжимыми на контур крыла L_z, за исключением отдельных особых точек, причем модуль скорости на L_z

$$v = v(s) = \left|\frac{d\,\varphi(s)}{d\,s}\right|, \quad 0 \le s \le l,$$

где s – дуговая абсцисса кривой L_z, l – ее длина, $\varphi(s)$ — граничные значения потенциала скоростей $\varphi(x, y)$.

Г. Г. Тумашевым в 1945 году была поставлена и решена так называемая обратная краевая задача о построении крыла с заранее заданными свойствами. А именно, предполагается, что K неизвестно, но известна схема его обтекания, заданы граничные значения модуля скорости $v = v(s), \quad 0 \le s \le l,$

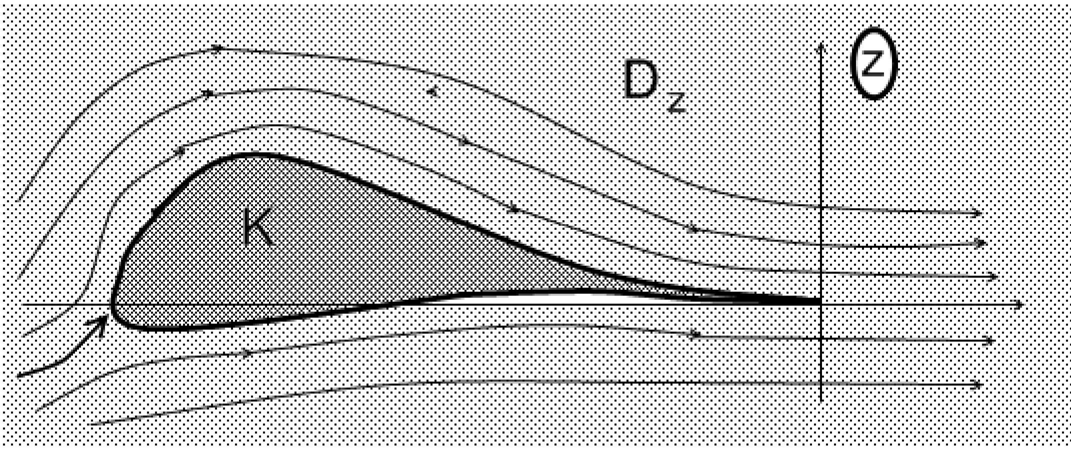

Рис. 8.1: Обтекание крыла K

и требуется построить такое крыло, распределение скорости течения на котором совпадает с заданной функцией $v(s)$.

Предположим, что задача решена, т. е. известен искомый профиль крыла K. Тогда известна кривая L_z с уравнением $z = z(s), \quad 0 \le s \le l$, область Ω_z^- – внешность связного компакта K, содержащая бесконечно удаленную точку и ограниченная кусочно-гладкой кривой L_z. Пусть $z_0 = z(s_0)$ – точка разветвления потока, а $z_1 = z(0)$ – точка схода потока с профиля, $\varphi(x, y)$ – потенциал поля скоростей потока вне крыла.

Рассмотрим конформное отображение $f : D^- \to \Omega_z^-$ внешности единичного круга D^- на область Ω_z^- с нормировками: $f(\infty) = \infty$, $f(1) = z_0$. Пусть $\zeta = \xi + i\eta$, с помощью конформной замены $z = f(\zeta)$ переменных определим функцию $\Phi(\xi, \eta)$ равенством

$$\Phi(\xi, \eta) = \varphi(x, y),$$

где $x = x(\xi, \eta) = \operatorname{Re} f(\xi + i\eta)$, $y = y(\xi, \eta) = \operatorname{Im} f(\xi + i\eta)$. Функция $\Phi(\xi, \eta) = \varphi(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$ в области D^- удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta\Phi = 0$ и однородному граничному условию Неймана. Следовательно, функция Φ представляет собой потенциал поля скоростей потока, обтекающего единичный круг по той же схеме, что и искомый профиль.

Соответствие границ L_z и единичной окружности при конформном отображении $f : D^- \to \Omega_z^-$ может быть описано как соответствие $s = s(\gamma)$ между дуговой абсциссой s, $0 \le s \le l$, и полярным углом γ, $0 \le \gamma \le 2\pi$. Обозначим $\varphi(s(\gamma)) = \Phi(\gamma)$ – граничные значения потенциалов течения.

Функцию $s = s(\gamma)$ можно определить из равенства

$$\Phi(\gamma) = \varphi(s), \qquad 0 \le \gamma \le 2\pi, 0 \le s \le l.$$

Поскольку на границах $ds = |dz|$, $d\gamma = |de^{i\gamma}| = |d\zeta|$, граничные значения модуля производной функции $z = f(\zeta)$ определятся формулой

$$\left|\frac{dz}{d\zeta}\right| = |f'(e^{i\gamma}| = s'(\gamma), \quad 0 \le \gamma \le 2\pi.$$

Поэтому по формуле Шварца

$$\kappa(\zeta) := \ln f'(\zeta) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln s'(\gamma)\frac{e^{i\gamma}+\zeta}{e^{i\gamma}-\zeta}\,d\gamma + i\alpha.$$

Следовательно, справедливо следующее утверждение.

Теорема 8.5. *Если обратная краевая задача по построению крыла по заданному распределению скорости разрешима, то конформное отображение внешности единичного круга на область течения вокруг искомого крыла определяется формулой*

$$f(\zeta) = z_1 + e^{i\alpha}\int_1^{\zeta} \exp\left\{-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln s'(\gamma)\frac{e^{i\gamma}+t}{e^{i\gamma}-t}\,d\gamma\right\} dt, \qquad |\zeta| > 1.$$

Эти рассуждения подсказывают и путь решения задачи.

Во-первых, задание схемы течения означает, что известны дуговые абсциссы $s = s_0$ и $s = 0$ точек разветвления и схода потока, а это позволяет определить граничные значения $\varphi(s)$ потенциала по известному модулю $|\varphi'(s)| = v(s)$ его производной.

Во-вторых, прямая задача описания течения вне единичного круга решается явными формулами и с точностью до выбора некоторых числовых параметров заранее известна функция $\Phi(\xi, \eta)$ в области D^-, следовательно, известны граничные значения $\Phi(\gamma)$, $0 \le \gamma \le 2\pi$. Поэтому из равенства $\Phi(\gamma) = \varphi(s)$, $0 \le \gamma \le 2\pi, 0 \le s \le l$, определятся функции $s = s(\gamma)$ и $\ln s'(\gamma) = \operatorname{Re}\,\kappa(e^{i\gamma})$.

Но тогда по формулам, приведенным выше, можно найти $\ln f'(\zeta)$, $f(\zeta)$, и искомая область Ω_z^- определится как образ D^- при конформном отображении $f : D^- \to \Omega_z^-$.

Мы оставили в стороне подробное обсуждение ряда важных и тонких вопросов по этой задаче, в частности, вопрос о целесообразном выборе задаваемой функции $|\varphi'(s)| = v(s)$, о выборе числовых параметров при определении $\Phi(\xi, \eta)$, об условиях, гарантирующих законность применения формулы

Шварца при определении $\ln f'(\zeta)$, об однозначности и однолистности построенного конформного отображения.

Основы теории обратной задачи теории крыла можно найти в монографиях Г. Г. Тумашева и М. Т. Нужина [12], Ф. Д. Гахова [6].

8.5 Задачи и упражнения

1) По заданному комплексному потенциалу течения постройте схематично эквипотенциальные линии и линии тока, определите скорость и ее критические точки, если $a)\quad w = (\alpha + i\beta)z;\quad b)\quad w = \frac{\Gamma + iQ}{2\pi i}\ln z;\quad c)\quad w = \frac{1}{z}$.

2) Найдите комплексный потенциал $w = w(z)$ потока, обтекающего единичный круг, со следующими данными: $z = e^{i\alpha}$ – точка разветвления потока ($\alpha \in (0, 2\pi)$), $z = 1$ – точка схода потока, скорость набегающего потока, т. е. скорость потока в бесконечно удаленной точке $w'(\infty) = v_\infty > 0$.

Указание. Исследуйте функцию вида

$$w = v_\infty \left(z + \frac{1}{z} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z, \quad 0 < \Gamma < 4\pi v_\infty.$$

3) Пользуясь решением предыдущей задачи и однолистными конформными отображениями из класса $\mathbf{\Sigma}$, найдите комплексные потенциалы $w = w(z)$ потоков, обтекающих компакты, отличные от единичного круга. В частности, найдите в явном виде комплексный потециал потока вне наклонннного отрезка $[i,\, a]$, $a > 0$.

4) Найдите общее решение следующей краевой задачи (задачи A_0 по терминологии Ф.Д. Гахова): пусть Ω – односвязная область на плоскости, ограниченная замкнутой жордановой кривой L, и задана точка $z_0 \in \Omega$. Требуется определить функцию $Q(z)$, аналитическую в области Ω, за исключением точки z_0, где для нее допустим полюс порядка не выше n и действительная часть которой непрерывна в замыкании области и на контуре L обращается в нуль.

Указание. Рассмотрите функцию $\zeta = \omega(z)$, определяющую однолистное конформное отображение области Ω на единичный круг с нормировкой $\omega(z_0) = 0$ и ищите функцию $q(\zeta) = Q(\omega^{-1}(\zeta))$ в виде следующей суммы

$$q(\zeta) = \sum_{k=-n}^{n} c_k\, \zeta^k.$$

5) Пусть снова Ω – односвязная область на плоскости, ограниченная замкнутой жордановой кривой L, и задана точка $z_0 \in \Omega$. Рассмотрим функцию

Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа, т.е. функцию вида

$$G(z, z_0) = \ln \frac{1}{|z - z_0|} + u(x, y), \quad z = x + iy,$$

гармоническую в $\Omega \setminus \{z_0\}$, непрерывно продолжимую на L и обращающуюся в нуль на L. Найдите связь между функцией Грина $G(z, z_0)$ и однолистным конформным отображением $F : \Omega \to D$ с нормировкой $F(z_0) = 0$. Пользуясь этой связью, найдите явно функцию Грина для нескольких конкретных областей, в частности, для круга D с произвольно фиксированным полюсом $z_0 \in D$.

6) Пусть функция $z = f(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \zeta^n, \ \ |\zeta| < 1$, осуществляет однолистное конформное отображение единичного круга D на односвязную область Ω, содержащую начало координат, и пусть $P(\Omega)$ – жесткость кручения этой области. Докажите формулу из [14]:

$$P(\Omega) = \frac{\pi}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{\alpha=1}^{[\frac{n}{2}]} \left| \sum_{\beta=\alpha}^{n-\alpha} a_\beta a_{n-\beta} \right|^2,$$

где $[x]$ означает, как обычно, целую часть числа x.

Указание. Рассмотрите ограниченные области $\Omega_r = f(rD)$, $0 < r < 1$. К ним применима формула Давенпорта. За счет перестановки слагаемых в формуле Давенпорта (перестановки будет законными в силу абсолютной сходимости рядов) можно показать, что

$$P(\Omega_r) = \frac{\pi}{2} \sum_{n=2}^{\infty} r^{2n} \sum_{\alpha=1}^{[\frac{n}{2}]} \left| \sum_{\beta=\alpha}^{n-\alpha} a_\beta a_{n-\beta} \right|^2.$$

Остается аккуратно осуществить предельный переход при $r \to 1^-$.

7) Пусть $P(\Omega)$ – жесткость кручения односвязной плоской области Ω, $R_\Omega(z)$ – конформный радиус этой области в точке $z = x + iy \in \Omega$.

7.1) Докажите неравенство автора (см., например, в [1], глава 4):

$$P(\Omega) \le 4 \iint_\Omega R_\Omega^2(x + iy)\, dx\, dy.$$

Указание. Применяя неравенство Коши-Буняковского-Шварца, получаем

$$\left(\iint_\Omega |u|\, dx\, dy \right)^2 = \left(\iint_\Omega \frac{|u|}{R_\Omega} R_\Omega\, dx\, dy \right)^2 \le \iint_\Omega R_\Omega^2\, dx\, dy \iint_\Omega \frac{|u|^2}{R_\Omega^2}\, dx\, dy.$$

Далее нужно воспользоваться вариационным определением жесткости кручения и конформно инвариантным неравенством, полученным как следствие теоремы 8.2 для любой функции $u \in C_0^\infty(\Omega)$.

7.2) Докажите точную оценку Р. Г. Салахудинова [36]: справедливо неравенство

$$P(\Omega) \geq \frac{3}{2} \iint_\Omega R_\Omega^2(x+iy)\, dx\, dy,$$

причем равенство в этом неравенстве в классе областей с конечной площадью будет иметь место тогда и только тогда, когда рассматриваемая область является кругом.

Указание. Воспользуйтесь формулой Г. Давенпорта или ее аналогом из упражнения 6. Предварительно докажите следующую формулу, аналогичную формуле Давенпорта: если функция $z = f(\zeta) = \sum_{n=1}^\infty a_n \zeta^n$, $|\zeta| < 1$, осуществляет однолистное конформное отображение единичного круга D на область Ω, то

$$\iint_\Omega R_\Omega^2(x+iy)\, dx\, dy = 2\pi \sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n(n^2-1)} \left| \sum_{\beta=1}^{[\frac{n}{2}]} (n-2\beta+1) \sum_{\alpha=\beta}^{n-\beta} a_\alpha a_{n-\alpha} \right|^2,$$

где $[x]$ – целая часть x.

Второе доказательство оценки Р. Г. Салахудинова можно найти в [14].

Глава 9

Квазиконформные отображения

9.1 Квазиконформные отображения и преобразования Мёбиуса

Рассмотрим область (открытое связное множество) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ и непрерывное отображение $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$. Таким образом, в области Ω задана непрерывная вектор-функция $y = f(x)$ векторного аргумента. Пусть в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ определена декартова система координат. Тогда задание $y = f(x)$ в координатной записи означает задание системы функций многих переменных: для любого $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \Omega$ определены числовые функции

$$y_1 = f_1(x_1, ..., x_n),$$

$$y_2 = f_2(x_1, ..., x_n),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$y_n = f_n(x_1, ..., x_n).$$

Предположим, что отображение $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ является инъективным и для любого $a = (a_1, ..., a_n) \in \Omega$ и рассмотрим верхний предел

$$K(a) = \limsup_{r \to 0^+} \frac{\max_{|x-a|=r} |f(x) - f(a)|}{\min_{|x-a|=r} |f(x) - f(a)|}.$$

Очевидно, $1 \leq K(a) \leq +\infty$.

Определение. Пусть $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ непрерывное, инъективное, сохраняющее ориентацию отображение области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Говорят, что отображение f

A) квазиконформно в точке $a \in \Omega$, если для этой точки существует величина $K(a) < +\infty$;

B) квазиконформно в области Ω, если оно квазиконформно в каждой точке этой области;

C) K-квазиконформно в области Ω ($K = \text{const} \geq 1$), если оно квазиконформно в этой области и $\sup\{K(a) : a \in \Omega\} \leq K$.

Рассмотрим частный случай, когда $n = 2$, f – конформное отображение области Ω. Для обозначения точек будем пользоваться комплексными числами $z = x_1 + ix_2$, $a = a_1 + ia_2 \in \Omega$. Поскольку в достаточно малой окрестности любой точки $a \in \Omega$ имеем представление

$$f(z) - f(a) = f'(a)(z - a) + o(z - a), \quad f'(a) \neq 0,$$

то легко получаем

$$K(a) = \lim_{r \to 0} \frac{\max_{|z-a|=r} |f(z) - f(a)|}{\min_{|z-a|=r} |f(z) - f(a)|} = \lim_{r \to 0} (1 + O(r)) = 1 \quad \forall a \in \Omega.$$

Можно доказать и обратное утверждение: если

$$K(a) = 1 \quad \forall a \in \Omega,$$

то f – конформное отображение области Ω. Таким образом, любое 1-квазиконформное отображение области является, в действительности, конформным отображением этой области.

Следует сразу отметить, что для конформных отображений пространственный случай $n \geq 3$ существенно отличается от плоского случая $n = 2$.

В пространственном случае конформные отображения областей также существуют. Например, конформными являются отображения, которые можно представить как суперпозицию отображений вида $f(x) = cx + d$ ($c = \text{const} \neq 0$, d – фиксированная точка) и четного числа инверсий относительно сфер и (или) плоскостей. Такие отображения называются мёбиусовыми. В плоском случае мёбиусовы отображения, как известно из общего курса ТФКП, совпадают с дробно-линейными отображениями.

Известна следующая теорема Лиувилля.

Теорема 9.1. *При $n \geq 3$ любое конформное отображение области, т. е. отображение, удовлетворяющее условию $K(a) = 1$ в любой точке области, является мёбиусовым.*

Прекрасным введением в теорию конформных отображений при $n \geq 3$ является курс лекций Л. Альфорса: "Преобразование Мёбиуса в многомерном пространстве". По пространственным квазиконформным отображениям и их обобщениям я рекомендую монографию Ю. Г. Решетняка [10].

9.2 Якобиан двумерного отображения и уравнение Бельтрами

Рассмотрим подробнее квазиконформные отображения плоских областей, т. е. двумерную теорию, обобщающую теорию конформных отображений областей на плоскости.

Возьмем для простоты гладкое, K-квазиконформное отображение

$$f : \Omega \to \mathbb{C}, \qquad \Omega \subset \mathbb{C}.$$

Вычислим сначала якобиан отображения. Дифференциал отображения f можно записать в следующем виде:

$$df = f_z dz + f_{\bar{z}} d\bar{z},$$

где f_z, $f_{\bar{z}}$ – частные производные в смысле Виртингера (см. определения в первой лекции).

Выделяя вещественные и мнимые части функции и независимой переменной $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $x + iy = z$, можем вычислить якобиан по известной формуле:

$$J = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}.$$

С другой стороны, имеем

$$|f_z|^2 - |f_{\bar{z}}|^2 = \frac{1}{4}|u_x + iv_x - i(u_y + iv_y)|^2 - \frac{1}{4}|u_x + iv_x + i(u_y + iv_y)|^2 =$$

$$= \frac{(u_x + v_y)^2 + (v_x - u_y)^2 - (v_x - u_y)^2 - (u_x + v_y)^2}{4} = u_x v_y - v_x u_y.$$

Таким образом, якобиан отображения f выражается формулой

$$J = |f_z|^2 - |f_{\bar{z}}|^2.$$

Для конформных отображений f

$$f_{\bar{z}} \equiv 0,\ \ f_z \equiv f'(z),$$

поэтому получаем уже известную нам формулу $J = |f_z|^2 = |f'(z)|^2$.

Оказывается, геометрическое описание квазиконформности отображений областей на плоскости можно заменить следующим: квазиконформным является любое инъективное отображение, определяемое как решение уравнения Бельтрами

$$f_{\bar{z}} = \mu(z) f_z$$

с коэффициентом $\mu(z)$, удовлетворяющим условию непрерывности (или измеримости, как минимум) и неравенству

$$|\mu(z)| < 1 \quad \forall z \in \Omega.$$

В стандартной теории рассматривается случай, когда $|\mu(z)| \le k = \mathrm{const}, k < 1$. Тогда f — K-квазиконформное отображение, причем

$$K = \frac{1+k}{1-k}.$$

Предположим, что решение уравнения Бельтрами удовлетворяет условию $f_z \ne 0$. Тогда

$$J = |f_z|^2 - |f_{\bar z}|^2 = |f_z|^2 - |\mu f_z|^2 = |f_z|^2(1-\mu^2) > 0,$$

следовательно, отображение сохраняет ориентацию.

9.3 Основной гомеоморфизм уравнения Бельтрами

Рассмотрим теперь решения f и q уравнений Бельтрами соответственно в некоторой ограниченной области Ω

$$f_{\bar z} = \mu(z) f_z, \quad |\mu(z)| \le k = \mathrm{const} < 1, \quad z \in \Omega,$$

и, одновременно с этим, во всей плоскости $\mathbb{C}$

$$q_{\bar z} = \tilde\mu(z) q_z, \qquad z \in \mathbb{C},$$

где

$$\tilde\mu(z) = \{\mu(z),\ z \in \Omega; \quad 0,\ z \in \mathbb{C} \setminus \Omega\},$$

т. е. мы пользуемся специальным продолжением коэффициента уравнения.

Справедливо следующее утверждение, доказанное Л. Альфорсом и И. Н. Векуа (см. [5]).

Теорема 9.2. *Пусть коэффициент $\tilde\mu(z)$ является измеримой функцией, удовлетворяющей в ограниченной области Ω неравенству*

$$|\mu(z)| \le k = \mathrm{const} < 1, \quad z \in \Omega.$$

Тогда существует гомеоморфизм

$$q : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$$

расширенной плоскости на себя, обладающее свойствами:

1) отображение q является конформным в области $\mathbb{C} \setminus \Omega$ и $q(\infty) = \infty$;

2) q имеет локально интегрируемые с квадратом обобщенные производные в смысле Соболева в Ω и удовлетворяет уравнению Бельтрами $q_{\bar{z}} = \tilde{\mu} q_z$.

Отображение $q : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ называется основным гомеоморфизмом уравнения Бельтрами. Нетрудно доказывается следующее утверждение.

Теорема 9.3. *Пусть Ω — область, ограниченная спрямляемой кривой Жордана, и пусть f — непрерывная функция, обладающая локально интегрируемыми с квадратом обобщенными производными в смысле Соболева и удовлетворяющая уравнению Бельтрами*

$$f_{\bar{z}} = \mu(z) f_z, \quad z \in \Omega,$$

с условием

$$|\mu(z)| \leq k = \mathrm{const} < 1, \quad z \in \Omega.$$

Тогда f может быть представлена как суперпозиция аналитической функции и основного гомеоморфизма, т. е. справедливо представление

$$f(z) = \Phi(q(z)), \quad z \in \Omega,$$

где Φ – функция, аналитическая в области $\Omega_1 = q(\Omega)$.

Доказательство. Пусть f – любое непрерывное решение уравнения Бельтрами, обладающее локально интегрируемыми с квадратом обобщенными производными в смысле Соболева и удовлетворяющее уравнению Бельтрами $f_{\bar{z}} = \mu(z) f_z, \quad z \in \Omega$. Определим функцию Φ равенством

$$f(z) = \Phi(q(z)),$$

т. е. соотношениями

$$\Phi(w) = f(q^{-1}(w)), \quad w = q(z).$$

Легко получаем, что Φ — аналитическая функция, так как для нее выполняются условия Коши-Римана $\Phi_{\bar{q}} = 0$ в силу следующих простых вычислений.

А именно, с использованием уравнений Бельтрами для f и q , а также соотношений $\bar{q}_{\bar{z}} = \overline{(q_z)}$, $\bar{q}_z = \overline{q_{\bar{z}}}$, будем иметь

$$f_{\bar{z}} = \mu f_z \Leftrightarrow \Phi_q q_z + \Phi_{\bar{z}} \bar{q}_{\bar{z}} = \mu \Phi_q q_{\bar{z}} + \mu \Phi_q \bar{q}_z \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Phi_{\bar{q}}[\bar{q}\bar{z} - \mu \bar{q}_z] \equiv 0 \Rightarrow \Phi_{\bar{q}} \equiv 0,$$

так как $[\bar{q}_{\bar{z}} - \mu \bar{q}_z] = \overline{(q_z)}(1 - \mu\bar{\mu}) = \overline{(q_z)}(1 - |\mu|^2)$, и поэтому $|\bar{q}_{\bar{z}} - \mu \bar{q}_z| \geq \sqrt{J_q}(1 - |\mu|^2) > 0$.

Легко получить и обратное утверждение:

если Φ – аналитическая функция, определенная в Ω_1, то функция вида $f = \Phi \circ q$ удовлетворяет уравнению Бельтрами.

Действительно, поскольку $q_{\bar{z}} = \mu q_z, z \in \Omega$ и $\Phi_{\bar{q}} = 0$ в силу условий Коши-Римана, будем иметь равенства $f_z = \Phi_q q_z + \Phi_{\bar{q}} \bar{q}_z = \Phi_q q_z$ и $f_{\bar{z}} = \Phi_q q_{\bar{z}} + \Phi_{\bar{q}} \bar{q}_{\bar{z}} = \Phi_q \mu q_z$. Отсюда непосредственно следует, что $f = \Phi \circ q$ удовлетворяет уравнению Бельтрами. Требуемые свойства производных f индуцируются соответствующими свойствами производных q и гладкостью аналитической функции.

9.4 Задачи и упражнения

Отметим, что задачи и упражнения относятся к квазиконформным отображениям плоских областей.

1) Найти квазиконформное отображение квадрата

$$\{z = x + iy : 0 < x < 1,\, 0 < y < 1\}$$

на прямоугольник

$$\{w = u + iv : 0 < u < 4,\, 0 < v < 2\},$$

переводящее все 4 вершины квадрата в вершины прямоугольника.

Решение. Искомое отображение можно определить равенствами $u = 4x$, $v = 2y$, или, в комплексной записи, как

$$w = u + iv = 4x + i2y = 4\frac{z + \bar{z}}{2} + i2\frac{z - \bar{z}}{2i} = 3z + \bar{z}.$$

Функция $w = w(z)$ удовлетворяет уравнению Бельтрами с постоянным коэффициентом

$$w_{\bar{z}} = \frac{1}{3} w_z,$$

и построенное нами отображение является квазиконформным с коэффициентом

$$K = \frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = 2.$$

2) Как хорошо известно, конформное отображение круга $|z| < 1$ на круг $|w| < 1$ дается функцией

$$w = \frac{z-a}{1-\bar{a}z},$$

где a — постоянная, $|a| < 1$.

Зафиксируем теперь z как точку единичного круга и рассмотрим $w = (z-a)/(1-\bar{a}z)$ как функцию переменной a, $|a| < 1$, т. е. рассмотрим функцию

$$w = f(a) := \frac{z-a}{1-\bar{a}z}, \quad |a| < 1,$$

при фиксированном z, $|z| < 1$.

Показать, что получаемое таким образом отображение является квазиконформным.

Указание. Покажите прямыми вычислениями, что $f(a_1) \neq f(a_2)$ для $a_1 \neq a_2$ $(a_1,\, a_2 \in D)$. Кроме того, простые вычисления дают

$$f_{\bar{a}} = \frac{z-a}{(1-\bar{a}z)^2} z,$$

$$f_a = \frac{-1}{1-\bar{a}z}.$$

Следовательно,

$$\frac{f_{\bar{a}}}{f_a} = -\frac{z-a}{1-\bar{a}z} z = \mu(a).$$

Отображение $f : \{a : |a| < 1\} \to \{w : |w| < 1\}$ является квазиконформным, причем $|\mu(a)| \leq |z| = k < 1$.

3) Докажите, что не существует K-квазиконформного отображения единичного круга на всю плоскость.

4) Докажите аналог теоремы Каратеодори граничном соответствии для K-квазиконформных отображений плоских областей.

5) Пусть $f : \Omega \to D$ — K-квазиконформное отображение жордановой области на единичный круг, удовлетворяющее уравнению Бельтрами $f_{\bar{z}} = \mu(z) f_z$ с условием $|\mu(z)| \le k = \mathrm{const} < 1, \quad z \in \Omega$.

Докажите, что такое отображение можно определить, причем единственным образом, если задать одну из нормировок B) или C):

B) для двух троек различных граничных точек $z_1, z_2, z_3 \in \partial D$ и $w_1, w_2, w_3 \in \partial\Omega$, выбранных с учетом положительной ориентации границ, выполняются равенства $f(z_1) = w_1,\ f(z_2) = w_2,\ f(z_3) = w_3$;

C) для пары внутренних точек $z_0 \in D$, $w_0 \in \Omega$ и пары граничных точек $z_1 \in \partial D$, $w_1 \in \partial\Omega$ выполняются равенства $f(z_0) = w_0,\ \ f(z_1) = w_1$.

6) Докажите, что справедливы следующие утверждения:

6.1) отображения f и f^{-1} одновременно K-квазиконформны;

6.2) суперпозиция K_1-квазиконформного и K_2-квазиконформного отображений будет $K_1 K_2$-квазиконформным отображением.

Если $K_1 = 1$ или $K_2 = 1$, то, соответственно, будем иметь равенства $K_1 K = K$ или $K K_2 = K$, поэтому мы можем утверждать: класс K-квазиконформных отображений инвариантен относительно конформных отображений.

7) Попробуйте самостоятельно разобраться в доказательстве следующей теоремы Мори, приведенной в книге [5], с. 48-51.

Теорема 9.4. *Пусть $\varphi : D \to D$ – K-квазиконформное отображение единичного круга на себя с нормировкой $\varphi(0) = 0$. Тогда функция φ является гёльдеровой, точнее, для любых двух точек z_1, z_2 из единичного круга имеет место неравенство*

$$|\varphi(z_1) - \varphi(z_2)| < 16\,|z_1 - z_2|^{1/K}, \quad z_1 \ne z_2,$$

причем константа 16 не может быть уменьшена.

Глава 10

Приложения к неравенствам Харди

Для решения краевых задач математической физики разработан ряд общих методов. Центральное место среди них занимает вариационный подход. Он основан на интегральных неравенствах, справедливых для всех функций, которые принадлежат подходящему пространству Соболева в заданной области Ω из евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$. Известен ряд классов вариационных неравенств, связанных с именами Стеклова, Пуанкаре, Фридрихса, Соболева, Харди и других.

Главная трудность при исследовании вариационных неравенств состоит в оценках констант, точнее, специальных функционалов области Ω, зависящих также от числовых параметров задачи. Существование конечных констант означает ограниченность норм соответствующих операторов вложения, и это требование приводит к "сортировке" областей Ω, точнее, к описанию "хороших" областей, для которых соответствующая задача математической физики имеет решение.

Пусть Ω – область на плоскости $\mathbb{C}$, $C_0^\infty(\Omega)$ – пространство бесконечно дифференцируемых функций f, имеющих компактные в Ω носители, т.е. обращающихся в нуль вблизи границы области. Нам также потребуется величина $\delta = \operatorname{dist}(z, \partial\Omega)$ — расстояние от точки $z = x + iy \in \Omega$ до границы области.

Хорошо известно, что для любой ограниченной области Ω существует конечная постоянная $c(\Omega)$ в неравенстве Пуанкаре

$$\iint\limits_{\Omega} |f|^2 dx\, dy \leq c(\Omega) \iint\limits_{\Omega} |\nabla f|^2 dx\, dy \quad \forall f \in C_0^\infty(\Omega).$$

Но известно, что имеются и неограниченные области, для которых существует $c(\Omega) < \infty$, и до сих пор не решена проблема описания **всего множества "хороших" областей Ω посредством простых геометрических характеристик** Ω. Более того, неясна возможность такого описания, так как нет подходящей гипотезы в случае плоских бесконечносвязных областей.

Считается, что весовые неравенства труднее неравенства Пуанкаре. Но тем не менее оказалось, что задача описания всех "хороших" областей простыми геометрическими условиями решается для следующего двумерного аналога неравенства Харди

$$\iint\limits_{\Omega} \frac{|f|^2}{\operatorname{dist}^2(z, \partial\Omega)} dx\, dy \le C(\Omega) \iint\limits_{\Omega} |\nabla f|^2 dx\, dy \quad \forall f \in C_0^\infty(\Omega).$$

А именно, доказано (см., например, стр. 343-345 монографии по гармоническим мерам [25]), что свойство равномерной совершенности границы области является необходимым и достаточным условием для существования конечной постоянной $C(\Omega)$.

Важным для нас обстоятельством является то, что равномерная совершенность границы области тесно связана со специальным свойством гиперболической метрики, и это свойство удается описать в простых и понятных терминах евклидовой геометрии. Пользуясь этим, в настоящей главе мы приведем решение задачи полного описания всего множества "хороших" плоских областей для указанного выше неравенства Харди.

Первый пункт посвятим вещественному анализу: приведем одномерное неравенство Харди и дадим с доказательством его двумерный аналог.

10.1 Неравенство Харди на луче и в областях на плоскости

Оригинальную теорему Харди с сингулярным ядром $1/t^s$ $(s > 1)$ можно сформулировать следующим образом.

Теорема 10.1. *Пусть $1 \le p < \infty$ и $1 < s < \infty$. Для любой абсолютно непрерывной неубывающей функции $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ такой, что $f(0) = 0$ и $f'/t^{s/p-1} \in L^p(0, \infty)$, имеет место неравенство*

$$\int_0^\infty \frac{f(t)^p}{t^s} dt \le \left(\frac{p}{s-1}\right)^p \int_0^\infty \frac{f'(t)^p}{t^{s-p}} dt. \tag{10.1}$$

Если $p > 1$ и $f \not\equiv 0$, то неравенство является строгим (т. е. не существует экстремальной функции), но постоянная $(p/(s-1))^p$ является точной, *т. е. не может быть уменьшена; если же $p = 1$, то это неравенство превращается в равенство, точнее, в следующее функциональное тождество*

$$\int_0^\infty \frac{f(t)}{t^s} dt = \frac{1}{s-1} \int_0^\infty \frac{f'(t)}{t^{s-1}} dt,$$

справедливое для всех допустимых функций.

Различные доказательства этой теоремы можно найти в книге [13], там же подробно обсуждаются и наиболее важные частные случаи: a) $p = s = 2$, b) $p = s > 1$ и не охваченный нашей формулировкой случай c) $p \geq 1,\ s < 1$, а также тонкие вопросы о точности констант при отсутствии экстремальных функций.

При доказательстве теоремы Харди можно ограничиться функциями $f \in C_0^\infty(0, \infty)$, затем замкнуть класс допустимых функций при условии $f'/t^{s/p-1} \in L^p(0, \infty)$. С учетом этого обстоятельства прямым аналогом теоремы 10.1 является следующее утверждение.

Теорема 10.2. (Ф. Г. Авхадиев [16]). *Пусть $1 \leq p < \infty$ и $2 < s < \infty$, и пусть Ω – открытое собственное подмножество $\mathbb{C}$. Тогда имеет место неравенство*

$$\iint_\Omega \frac{|f|^p}{\delta^s} dx\, dy \leq \left(\frac{p}{s-2}\right)^p \iint_\Omega \frac{|\nabla f|^p}{\delta^{s-p}} dx\, dy \quad \forall f \in C_0^\infty(\Omega), \tag{10.2}$$

где $\delta = \delta(z) = \mathrm{dist}(z, \partial\Omega)$. Существуют области, для которых постоянная $(p/(s-2))^p$ не может быть уменьшена.

Доказательство теоремы 10.2. Без ограничения общности можно считать, что Ω – область, т. е. открытое связное подмножество $\mathbb{C}$.

Шаг 1. Упростим немного задачу, а именно, покажем, что достаточно ограничиться рассмотрением областей специального вида, составленных из "квадратиков" со сторонами, параллельными осям координат и с одинаковыми длинами сторон.

С этой целью для $h \in (0, 1)$ рассмотрим стандартное покрытие $\mathbb{R}^2$ квадратами

$$Q_{h,w} = [0, h] \times [0, h] + hw, \qquad w \in \mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2.$$

Определим конечное множество индексов

$$\mathbb{Z}^2(\Omega, h) = \{w \in \mathbb{Z}^2 : Q_{h,w} \subset \Omega \cap \{w \in \mathbb{C} : |w| < 1/h\}\}$$

и следующую аппроксимацию Ω:

$$\Omega_h = \mathrm{int} \cup_{w \in \mathbb{Z}^2(\Omega, h)} Q_{h,w}.$$

Ясно, что для фиксированной функции $f \in C_0^\infty(\Omega)$ достаточно доказать неравенство (10.2) для $\Omega = \Omega_h$ при всех достаточно малых $h \in (0,1)$ таких, что носитель функции f содержится в Ω_h.

Замена $\zeta = z/h$, $z \in \Omega_h$, показывает, что (10.2) для $\Omega = \Omega_h$ и $\Omega = \Omega_1$ эквивалентны. Таким образом, нам достаточно доказать неравенство (10.2) для области вида

$$\Omega_1 = \operatorname{int} \cup_{j=1}^m ([0,1] \times [0,1] + w_j), \qquad w_j \in \mathbb{Z}^2,$$

составленной из "квадратиков".

Шаг 2 . Построим специальное разбиение области $\Omega = \Omega_1$, в которой будем теперь доказывать искомое неравенство Харди.

Пусть S – некоторая сторона или вершина квадрата Q_{1,w_j}, т. е. q-мерная грань квадрата, такая, что $S \subset \partial\Omega_1$. Определим следующее подмножество области Ω_1:

$$Q(S) = \{z \in \mathbb{C} : \exists\, z' \in \operatorname{int} S,\ B(z, |z - z'|) \subset \Omega_1\},$$

где $B(z, |z - z'|)$ – круг $\{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta - z| < |z' - z|\}$. Отметим, что под внутренностью $\operatorname{int} S$ мы подразумеваем сторону квадрата без концевых точек и, по определению, $\operatorname{int} S = S$, если S – 0-мерная грань, т.е. точка, являющаяся вершиной квадрата.

Предположим, что $Q(S) \neq \emptyset$. Это всегда имеет место, если S – сторона квадрата такая, что $S \subset \partial\Omega_1$. Множество $Q(S) \neq \emptyset$ является звездной относительно S, т.е. $z' + t(z - z') \in Q(S)$ для любого $z' \in \operatorname{int} S$ и всех $t \in (0,1)$, если $|z - z'| = \operatorname{dist}(z, \partial\Omega_1)$ и $z \in Q(S)$.

Если S' – некоторая j-мерная грань некоторого квадрата ($j = 0, 1$ и $S' \subset (\partial\Omega_1) \setminus S$), то эквидистантное множество

$$(S, S') := \{z \in \Omega : \operatorname{dist}(z, S) = \operatorname{dist}(z, S') \leq \operatorname{dist}(z, \partial\Omega_1)\}$$

является либо отрезком некоторой прямой, либо дугой параболы. Очевидно, плоская мера $\operatorname{mes}_2(S, S') = 0$ и

$$(\partial Q(S)) \setminus S \subset \cup_{S'} (S, S'),$$

получаем, что $\operatorname{mes}_2 \partial Q(S) = 0$. Следовательно, для любой функции $g \in C(\overline{\Omega}_1)$

$$\iint_{\Omega_1} g(z)\, dx\, dy = \sum_{S \subset \partial\Omega_1} \iint_{Q(S)} g(z)\, dx\, dy. \tag{10.3}$$

Предположим, что $f \in C_0^\infty(\Omega_1)$, $p \geq 1$, $s > 2$, и будем пользоваться формулой (10.3) для функции

$$g(z) = \frac{|f(z)|^p}{\delta^s(z)}.$$

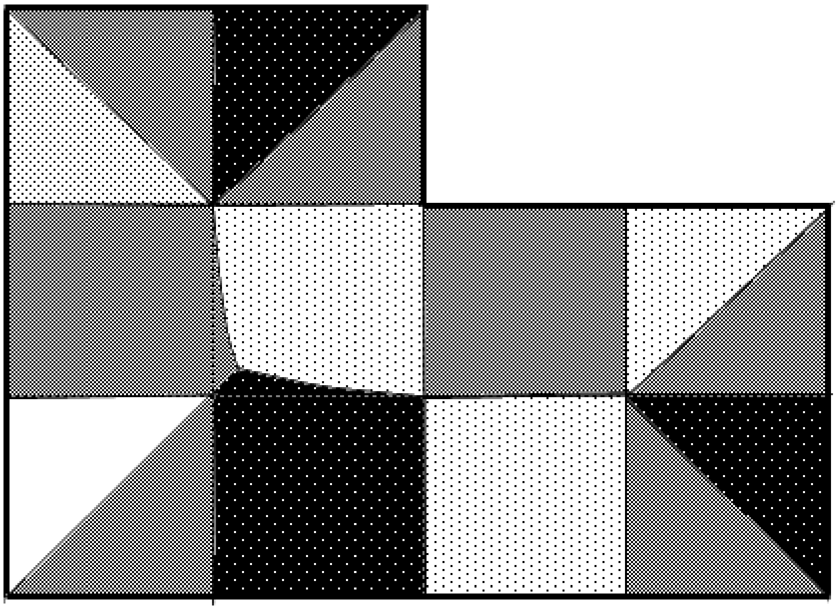

Рис. 10.1: Разбиение простейшей невыпуклой области, составленной из квадратиков

Шаг 3. Докажем теперь некоторые неравенства типа Харди для каждого множества $Q(S) \neq \emptyset$ в отдельности, и затем просуммируем.

При вычислении интегралов по $Q(S) \neq \emptyset$ будем иметь в виду, что функция f обращается в нуль на множестве S. Кроме того, каждое множество $Q(S) \neq \emptyset$ с точностью до движения на евклидовой плоскости, т. е. с точностью до сдвига и вращения можно представить в следующем виде:

$$Q(S) = \{z = x + ir \in \mathbb{C} : 0 < x < 1, \ \ 0 < r \leq \varphi_1(x)\}$$

в случае, когда S — сторона квадрата, и

$$Q(S) = \{z = re^{i\theta} \in \mathbb{C} : 0 \leq \theta \leq \pi/2, \ \ 0 < r = |z| \leq \varphi_0(\theta)\}$$

в случае, когда $S = \{0\}$ — вершина квадрата.

Отметим, что в обоих случаях $\delta(z) = r$, т. е. расстояние до границы является одной из координат, а именно, декартовой координатой в первом случае и полярным радиусом – во втором. Укажем также, что функции φ_1 и φ_0 являются кусочно-гладкими функциями, их графики состоят из конечного числа отрезков прямых или дуг парабол.

Переходя к повторным интегралам, для двойного интеграла по множеству $Q(S) \neq \emptyset$ мы получаем формулы двух типов:

если S — сторона квадрата, то

$$\int_0^1 dx \int_0^{\varphi_1(x)} \frac{|f(x+ir)|^p}{r^s}\, dr; \tag{10.4}$$

если же $S = \{0\}$ — вершина квадрата, то

$$\int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\varphi_0(\theta)} \frac{|f(re^{i\theta})|^p}{r^s}\, r\, dr. \tag{10.5}$$

Преобразуем и оценим внутренние интегралы в формулах (10.4), (10.5) с учетом того, что f обращается в нуль при $r = 0$. Для $k = 1$ или $k = 2$ получаем

$$\int_0^{\varphi_{2-k}} \frac{|f|^p}{r^s} r^{k-1} dr = \int_0^{\varphi_{2-k}} t^{k-s-1} dt \int_0^t \frac{\partial |f|^p}{\partial r} dr \leq$$

$$\leq p \int_0^{\varphi_{2-k}} t^{k-s-1} dt \int_0^t |f|^{p-1} |\nabla f| dr = p \int_0^{\varphi_{2-k}} |f|^{p-1} |\nabla f| dr \int_r^{\varphi_{2-k}} t^{k-s-1} dt =$$

$$= p \int_0^{\varphi_{2-k}} |f|^{p-1} |\nabla f| \;\; A(r, \varphi_{2-k}) dr,$$

где

$$A(r, \varphi_{2-k}) = \frac{1}{s-k} \left(\frac{1}{r^{s-k}} - \frac{1}{\varphi_{2-k}^{s-k}} \right).$$

Поскольку при $k = 1$ или $k = 2$

$$A(r, \varphi_{2-k}) \leq \frac{1}{s-k} \frac{1}{r^{s-k}} \leq \frac{r^{k-1}}{(s-2) r^{s-1}}$$

и интегрирование по внешним переменным x или θ сохраняет неравенство, для любого $Q(S) \neq \emptyset$ имеем

$$\iint_{Q(S)} \frac{|f|^p}{\delta^s} dx\, dy \leq \frac{p}{s-2} \iint_{Q(S)} \frac{|f|^{p-1} |\nabla f|}{\delta^{s-1}} dx\, dy.$$

Пользуясь этим и формулой (10.3), окончательно получаем

$$\iint_{\Omega_1} \frac{|f|^p}{\delta^s} dx\,dy \le \frac{p}{s-2} \iint_{\Omega_1} \frac{|f|^{p-1}|\nabla f|}{\delta^{s-1}} dx\,dy.$$

В случае $p = 1$ полученное соотношение представляет собой доказываемое неравенство. Если $p > 1$, то, дополнительно применяя неравенство Гёльдера с показателями p и $p' = p/(p-1)$ к интегралу в правой части, получаем

$$\iint_{\Omega_1} \frac{|f|^p}{\delta^s} dx\,dy \le \frac{p}{s-2} \left(\iint_{\Omega_1} \frac{|f|^p}{\delta^s} dx\,dy\right)^{1-1/p} \left(\iint_{\Omega} \frac{|\nabla f|^p}{\delta^{s-p}} dx\,dy\right)^{1/p}.$$

Отсюда и следует доказываемое неравенство (10.2) при $p > 1$.

Шаг 4. Покажем теперь точность верхней границы $(p/(s-2))^p$ на некоторых примерах. Пусть Ω_0 – открытое множество в $\mathbb{C}$ такое, что

$$0 \in \partial\Omega_0, \quad \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 3\} \subset \Omega_0.$$

Введем следующие обозначения

$$X = \iint_{\Omega_0} \frac{|u|^p}{\delta^s} dx\,dy, \quad Y = \iint_{\Omega_0} \frac{|\nabla u|^p}{\delta^{s-p}} dx\,dy, \quad \delta = \operatorname{dist}(z, \partial\Omega_0).$$

Пусть $p \ge 1$, $s > 2$, $\varepsilon > 0$. Рассмотрим функцию $u = u_\varepsilon(z)$, определенную равенствами

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(z) &= |z|^{(s-2+\varepsilon)/p}, && 0 < |z| \le 1,\\ u_\varepsilon(z) &= 2 - |z|, && 1 < |z| \le 2,\\ u_\varepsilon(z) &= 0, && 2 < |z| < \infty. \end{aligned}$$

Прямыми вычислениями получаем

$$X(u_\varepsilon) = \frac{2\pi}{\varepsilon} + O(1), \quad Y(u_\varepsilon) = \frac{2\pi}{\varepsilon}\left(\frac{s-2+\varepsilon}{p}\right)^p + O(1).$$

Аппроксимируя u_ε радиальными функциями (т. е. функциями, зависящими лишь от $|z|$), принадлежащими $C_0^\infty(B(0,3) \setminus \{0\})$, получаем, что постоянная в неравенстве (10.2) не может быть меньше величины

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(\frac{p}{s-2+\varepsilon}\right)^p = \left(\frac{p}{s-2}\right)^p.$$

В частности, константа из теоремы точна для области $B(0,3) \setminus \{0\}$, следовательно, она точна для любого круга с проколотым центром.

Этим и завершается доказательство теоремы 10.2.

Теорема Харди 10.1 лежит в основе одного из бурно развивающихся направлений в современной математике. Для дальнейшего знакомства с неравенствами типа Харди в плоских и пространственных областях я рекомендую просмотреть статьи А. Анконы [15], Е. Б. Дэвиса [23], В. М. Миклюкоа и М. Р. Вуоринена [32], отражающие различные подходы к задачам и вскрывающие глубокие связи этой тематики с геометрической теорией функций.

В двух последующих разделах мы ограничимся описанием решения лишь одной задачи, сформулированной во введении к этой главе.

10.2 Области с равномерно совершенными границами

Пусть Ω – область (открытое связное множество) на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, причем будем предполагать, что Ω имеет не менее трех граничных точек в $\overline{\mathbb{C}}$, что равносильно наличию более одной граничной точки в $\mathbb{C}$. Таким образом, всюду в дальнейшем мы рассматриваем области Ω гиперболического типа на плоскости $\mathbb{C}$.

Напомним, что нетривиальное (т. е. содержащее более одной точки) множество называется совершенным, если оно содержит все свои предельные точки.

Следуя Х. Поммеренке [35], мы будем говорить, что граница $\partial\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ области $\Omega \subset \mathbb{C}$ является *равномерно совершенной*, если является конечной величиной *максимальный модуль* $M_0(\Omega)$, определяемый следующим образом.

P_1) $M_0(\Omega) = 0$, если не существует никакой граничной точки $z_0 \in \partial\Omega$, которая служила бы центром некоторой окружности, лежащей в Ω;

P_2) если в область Ω можно вписать хотя бы одну окружность с центром в некоторой граничной точке $\zeta \in \partial\Omega$, то область Ω содержит и круговые концентрические кольца, центры которых лежат на $\partial\Omega$, и поэтому корректно определена величина

$$M_0(\Omega) := \sup \frac{1}{2\pi} \ln \frac{R(A)}{r(A)},$$

где супремум берется по всем круговым концентрическим кольцам вида

$$A = \{z \in \mathbb{C} : r(A) < |z - z_0| < R(A)\}$$

и таким, что

$$A \subset \Omega, \quad z_0 \in \partial\Omega.$$

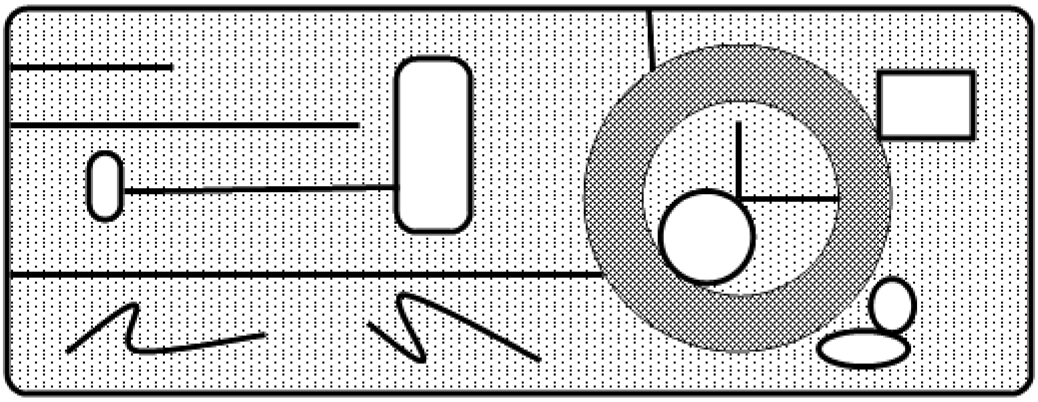

Рис. 10.2: Определение максимального модуля

Поясним некоторые простые, но важные нюансы в этом определении областей с равномерно совершенными границами.

Поскольку мы рассматриваем области $\Omega \subset \mathbb{C}$, т. е. $\infty \notin \Omega$, бесконечно удаленная точка является либо внешней, либо граничной точкой для области Ω. Поэтому в области $\{z \in \overline{\mathbb{C}} : |z - z_0| \geq R(A)\}$ имеются точки из $\partial\Omega$, и **кольца $A \subset \Omega$, участвующие в пункте P_2) определения максимального модуля $M_0(\Omega)$, разделяют граничные компоненты области Ω,** так как круг $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r(A)\}$, внутренняя компонента множества $\overline{\mathbb{C}} \setminus A$, очевидно, содержит граничную точку z_0 и во внешней компоненте $\{z \in \overline{\mathbb{C}} : |z - z_0| \geq R(A)\}$ множества $\overline{\mathbb{C}} \setminus A$ также имеются граничные точки рассматриваемой области Ω.

Отметим далее, что граница $\partial\Omega$ любой односвязной области $\Omega \subset \mathbb{C}$ гиперболического типа является равномерно совершенной автоматически.

Совершенность границы $\partial\Omega$ для любой конечносвязной области означает, что $\partial\Omega$ не имеет компонент, состоящих из одной точки, т. е. граница любой конечносвязной области совершенна тогда и только тогда, когда отсутствуют изолированные граничные точки. Легко установить, что равномерная совершенность в этом случае сводится к тому же простому условию отсутствия вырожденных в точку компонент границы области.

Таким образом, граница любой конечносвязной области равномерно совершенна тогда и только тогда, когда она совершенна.

Для бесконечносвязных областей равномерная совершенность означает нечто большее, чем простое отсутствие изолированных граничных точек.

Приведем три примера. Рассмотрим области типа $B(0,3)\backslash E_j$, где $B(0,3) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 3\}$, т. е. круг радиуса 3, из которого удален некоторый компакт. Границы рассматриваемых областей состоят из объединения удаляемых компактов с окружностью радиуса 3.

Пример 1. Предположим, что $E_1 = \bigcup_{m=1}^{\infty} K_m \bigcup \{0\}$, где

$$K_m = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : y = 0,\ m^{-m} \le x \le 2m^{-m}\}.$$

Область $\Omega_1 = B(0,3)\backslash E_1$ содержит в себе кольца

$$A_m = \{z \in \mathbb{C} : 2(m+1)^{-m-1} < |z| < m^{-m}\}$$

и

$$\frac{R(A_m)}{r(A_m)} = \frac{m+1}{2}\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \to \infty \text{ при } m \to \infty.$$

Следовательно,

$$M_0(\Omega_1) = \infty,$$

т. е. граница области Ω_1 не является равномерно совершенной, хотя она, очевидно, представляет собой совершенное множество.

Пример 2. Пусть теперь $E_2 = \bigcup_{m=1}^{\infty} L_{2m-1} \bigcup \{0\}$, где

$$L_{2m-1} = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : y = 0,\ 3^{-2m+1} \le x \le 3^{-2m+2}\}.$$

Для любого кольца A в $\Omega_2 = B(0,3)\backslash E_2$ с центром на $\partial\Omega_2$ имеем $R(A)/r(A) \le 3$. Просто показать, что

$$M_0(\Omega_2) = \frac{1}{2\pi} \ln\ 3.$$

Таким образом, граница области Ω_2 является равномерно совершенной, несмотря на то, что вторая область отличается от области из примера 1 лишь выбором длин удаляемых отрезков.

Следующий пример существенно отличается от первых двух тем, что рассматриваемая область не является счетносвязной.

Пример 3. Пусть $E_3 = K \subset [0,1]$ – классическое канторово множество. Рассмотрим

$$\Omega_3 = B(0,3)\backslash E_3.$$

Легко показать, что

$$M_0(\Omega_3) = M_0(\Omega_2) = \frac{1}{2\pi} \ln 3.$$

Отметим также, что $M_0(\Omega) = 0$ для любой односвязной области, но обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

Семейство $\{\Omega : M_0(\Omega) = 0\}$ **является богатой коллекцией областей, причем оно содержит области произвольной связности.**

Так, например, равенство $M_0(\Omega_0 \setminus \overline{K}) = 0$ справедливо для всех областей $\Omega = \Omega_0 \setminus \overline{K}$, удовлетворяющих следующим условиям:

(1) Ω_0 – такая область в плоскости $\mathbb{C}$, что $\sup\{\mathrm{dist}(z, \partial\Omega_0) : z \in \Omega_0\} = 1$, в частности, Ω_0 – некоторая полоса ширины 2;

(2) $K = \bigcup_{m=1}^{\infty} C_m$, где C_m являются континуумами (связными компактами), причем $\mathrm{diam}\, C_m \geq 2$;

(3) $K \subset \Omega_0$, и $\Omega_0 \setminus \overline{K}$ – открытое связное множество.

В литературе по равномерно совершенным множествам можно найти и два других варианта определения максимального модуля области. Во всех определениях максимальный модуль односвязной гиперболической области берется равным нулю (или вовсе не рассматривается).

Считая определение максимального модуля $M_0(\Omega)$ **первой версией, приведем две других**.

Версия вторая. Максимальный модуль $M_1(\Omega)$ определяется так:

P_1) $M_1(\Omega) = 0$, если не существует никакой окружности, лежащей в области Ω и разделяющей граничные компоненты этой области;

P_2) если в область Ω можно вписать хотя бы одну окружность, разделяющую ее граничные компоненты, то корректно определена величина

$$M_1(\Omega) := \sup \frac{1}{2\pi} \ln \frac{R(A)}{r(A)},$$

где супремум берется по всем таким круговым концентрическим кольцам

$$A = \{z \in \mathbb{C} : r(A) < |z - z_0| < R(A)\} \subset \Omega,$$

которые разделяют компоненты $\partial\Omega$.

Версия третья, она является основной в теоретических исследованиях, когда нет необходимости в явных оценках постоянных.

Максимальный модуль $M(\Omega)$ определяется следующим образом.

P_1) $M(\Omega) = 0$ для любой односвязной области гиперболического типа, а для любой двусвязной области $\Omega = \Omega_2$ максимальный модуль определяется равным модулю $M(\Omega_2)$ этой области;

P_2) в общем случае, если область Ω не является односвязной, то полагают

$$M(\Omega) := \sup M(\Omega_2),$$

где супремум берется по всем таким двусвязным областям Ω_2, что $\Omega_2 \subset \Omega$ и Ω_2 разделяет компоненты $\partial\Omega$.

Справедливы следующие неравенства: для любой области Ω гиперболического типа

$$M_0(\Omega) \leq M_1(\Omega) \leq M(\Omega) \leq M_0(\Omega) + \frac{1}{2}.$$

Первые два неравенства являются очевидными следствиями определений. Удивительным фактом является третье неравенство, восходящее к О. Тейхмюллеру. В указанной форме с точной константой 1/2 оно доказано в [20], с. 39-40, с применением одного результата О. Тейхмюллера об экстремальных модулях для двусвязных областей и формул Л. Альфорса для модуля экстремальной области.

Качественный результат, о котором шла речь во введении к этой главе, может быть сформулирован так:

равномерная совершенность границы области является необходимым и достаточным условием существования константы Харди для двумерной области.

В следующей теореме докажем "необходимость".

Теорема 10.3. (Ф. Г. Авхадиев [16]). *Пусть Ω – область на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, имеющая более одной граничной точки в $\mathbb{C}$. Если существует конечная величина $C(\Omega)$, для которой имеет место неравенство Харди*

$$\iint\limits_{\Omega} \frac{|f|^2}{\operatorname{dist}^2(z, \partial\Omega)} dx\, dy \leq C(\Omega) \iint\limits_{\Omega} |\nabla f|^2 dx\, dy \quad \forall f \in C_0^\infty(\Omega),$$

то справедлива оценка

$$2M_0(\Omega) \leq \sqrt{C(\Omega)},$$

следовательно, граница области Ω является равномерно совершенным множеством.

Доказательство. Если максимальный модуль равен нулю, то доказывать нечего. Очевидно, достаточно рассмотреть лишь случай, когда $0 < M_0(\Omega) \leq \infty$ и $0 < C(\Omega) < \infty$.

Предположим обратное, т. е. допустим существование такой гиперболической области Ω, для которой

$$\sqrt{C(\Omega)} < 2M_0(\Omega).$$

Из этого предположения и из определения $M_0(\Omega)$ следует, что для любого числа m, удовлетворяющего неравенствам

$$\sqrt{C(\Omega)}/2 < m < M_0(\Omega),$$

существует такое круговое кольцо

$$A = \{z \in \mathbb{C} : r(A) < |z - z_0| < R(A)\} \subset \Omega,$$

что $z_0 \in \partial\Omega$ и

$$\sqrt{C(\Omega)} < 2m = \frac{1}{\pi} \ln \ \frac{R(A)}{r(A)} < \infty.$$

Так как постоянная Харди $C(\Omega)$ является инвариантной при линейных преобразованиях Ω, без ограничения общности можно считать, что

$$z_0 = 0, \quad R(A) = 1, \quad r(A) = \varepsilon \in (0, 1).$$

Тогда круговое кольцо имеет вид

$$A = \{z \in \mathbb{C} : \varepsilon < |z| < 1\} \subset \Omega,$$

а наше ограничение $\sqrt{C(\Omega)} < 2m$ эквивалентно неравенству

$$m = \frac{1}{2\pi} \ln \ \frac{1}{\varepsilon} > \frac{\sqrt{C(\Omega)}}{2}.$$

Запишем теперь рассматриваемое неравенство Харди для более узкого семейства функций, а именно, для произвольной функции $f \in C_0^\infty(A) \subset C_0^\infty(\Omega)$. Будем иметь неравенство

$$\iint_A \frac{|f|^2}{\operatorname{dist}^2(z, \partial\Omega)} dx\, dy \leq C(\Omega) \iint_A |\nabla f|^2 dx\, dy \quad \forall f \in C_0^\infty(A).$$

Перейдем к полярным координатам и еще раз сузим класс допустимых функций, а именно, возьмем лишь радиальные функции, т. е. функции вида

$$f(r, \theta) = v(r), \quad v \in C_0^\infty(\varepsilon, 1).$$

Пользуясь простой оценкой $\operatorname{dist}\,(z, \partial\Omega) \leq |z|$ и радиальными функциями, получаем из последнего неравенства

$$\int_\varepsilon^1 \frac{|v(r)|^2 r dr}{r^2} \leq C(\Omega) \int_\varepsilon^1 |v'(r)|^2 r dr \quad \forall\ v \in C_0^\infty(\varepsilon, 1).$$

Заменами независимой переменной $r = \varepsilon \exp(2mt)$ и функции $v(r) = g(t)$ приходим к эквивалентному одномерному неравенству Пуанкаре

$$\int_0^\pi |g(t)|^2\, dt \le \frac{C(\Omega)}{4m^2} \int_0^\pi |g'(t)|^2 dt \quad \forall\, g \in C_0^\infty(0,\pi).$$

Поскольку точная константа в указанном одномерном неравенстве Пуанкаре равна единице, будем иметь

$$C(\Omega) \ge 4m^2.$$

что противоречит неравенству $\sqrt{C(\Omega)} < 2m$.

Теорема доказана.

10.3 Верхние оценки констант Харди

В этом пункте мы приведем явные оценки сверху для констант Харди при условии конечности максимального модуля области. Эти оценки показывают, что равномерная совершенность границы области является также и достаточным условием существования константы Харди $C(\Omega) < +\infty$.

Рассмотрим последовательно случаи односвязных, двусвязных и многосвязных областей.

Теорема 10.4. (А. Анкона [15]). *Пусть Ω – односвязная область на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, имеющая более одной граничной точки в $\mathbb{C}$. Тогда имеет место следующее неравенство Харди*

$$\iint\limits_{\Omega} \frac{|f|^2}{\operatorname{dist}^2(z,\partial\Omega)} dx\, dy \le 16 \iint\limits_{\Omega} |\nabla f|^2 dx\, dy \quad \forall f \in C_0^\infty(\Omega).$$

Доказательство. Пусть $R_\Omega(z)$ – конформный радиус области Ω в точке z. Для односвязной области, как показано в теореме 8.2, справедливо неравенство

$$\iint_\Omega |\nabla u(x,y)|^2\, dx\, dy \ge \iint_\Omega \frac{|u(x,y)|^2}{R_\Omega^2(z)}\, dx\, dy \ \ \forall u \in C_0^\infty(\Omega). \tag{10.6}$$

Утверждение теоремы непосредственно следует из этого неравенства при $f = u(x,y)$ с учетом неравенства Кёбе об 1/4 для односвязной области (см. задачу 6 к главе 4)

$$R_\Omega(z) \le 4 \operatorname{dist}(z,\partial\Omega), \quad z \in \Omega. \tag{10.7}$$

Таким образом, теорема доказана. Приведем два пояснения к формулировке и доказательству этой важной теоремы.

1) А. Анкона [15] получает (10.6) сначала для полуплоскости

$$\Pi = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : x > 0\}$$

как простое следствие неравенства Харди (10.3) следующим образом.

Полагая $s = p = 2$ и $f(t) = |u(t,y)|$ $(u \in C_0^\infty(\Pi))$ в неравенстве Харди (10.3), имеем

$$\int_0^\infty \frac{|u(t,y)|^2}{t^2} dt \leq 4 \int_0^\infty \left|\frac{\partial u(t,y)}{\partial t}\right|^2 dt \leq 4 \int_0^\infty |\nabla u(t,y)|^2 \, dt,$$

следовательно,

$$\int_{-\infty}^\infty dy \int_0^\infty \frac{|u(x,y)|^2}{4x^2}\, dx \leq \int_{-\infty}^\infty dy \int_0^\infty |\nabla u(x,y)|^2 \, dx.$$

Поскольку $4x^2 = R_\Pi^2(z)$, неравенство (10.6) доказано для случая полуплоскости. Остается заметить, что неравенство (10.6) является конформно инвариантным, поэтому оно будет верно для любой односвязной области, конформно эквивалентной полуплоскости.

2) Постоянная 16 в теореме А. Анконы не является, по-видимому, оптимальной, т. е. наименьшей из возможных. В настоящее время можно лишь утверждать следующее: наилучшая постоянная $C(\Omega)$, определяемая равенством

$$C(\Omega) = \sup_{f \in C_0^\infty(\Omega)} \frac{\iint\limits_\Omega |f|^2 \mathrm{dist}^{-2}\,(z, \partial\Omega) dx\, dy}{\iint\limits_\Omega |\nabla f|^2 dx\, dy},$$

должна удовлетворять неравенствам $4 \leq C(\Omega) \leq 16$ для любой односвязной области Ω. Таким образом, остается открытой проблемой нахождение точной константы

$$C = \sup C(\Omega) \in [4, 16],$$

где супремум берется по всем односвязным областям $\Omega \subset \mathbb{C}$ гиперболического типа.

Прежде чем перейти к обсуждению неравенств Харди в многосвязных областях, напомним одно определение. Пусть $\lambda_\Omega(z)$ – плотность метрики Пуанкаре с кривизной -4 в области Ω гиперболического типа. В главе 2 было отмечено, что обратную величину

$$R(z, \Omega) := \frac{1}{\lambda_\Omega(z)}$$

называют гиперболическим радиусом. Напомним также, что в случае односвязных областей, не содержащих бесконечно удаленной точки, гиперболический радиус $R(z,\Omega)$ совпадает с конформным радиусом $R_\Omega(z)$.

Для оценки сверху константы Харди для двусвязных областей нам потребуется конформно инвариантное неравенство. Специалистам по гиперболической геометрии известно, что аналог неравенства (10.6) верен и для двусвязных областей. Но доказательство этого факта, насколько известно автору, можно извлечь лишь из научных статей, посвященных оценкам собственных чисел лапласиана на поверхностях с постоянной отрицательной кривизной.

Для удобства читателя мы приведем простое прямое доказательство аналога неравенства (10.6) с заменой конформного радиуса на гиперболический.

Лемма 10.1. *Если Ω_2 – двусвязная область гиперболического типа, то справедливо неравенство*

$$\iint_{\Omega_2} |\nabla u(x,y)|^2\,dx\,dy \geq \iint_{\Omega_2} |u(x,y)|^2 \lambda^2_{\Omega_2}(z)\;dx\,dy\;\;\forall u \in C_0^\infty(\Omega_2). \tag{10.8}$$

Доказательство леммы (см. [3]). Рассмотрим полосу

$$\Pi(q) = \{z : \log q < Rez < 0\} \qquad (0 \leq q < 1).$$

Отметим, что случаю $q=0$ соответствует полуплоскость. В силу (10.6) имеет место неравенство

$$\iint\limits_{\Pi(q)} \frac{|f|^2 dx\,dy}{R^2_{\Pi(q)}(z)} \leq \iint\limits_{\Pi(q)} |\nabla f|^2 dx\,dy \qquad \forall f \in C_0^\infty\left(\Pi(q)\right). \tag{10.9}$$

В качестве f выберем функцию, обладающую свойством 2π-периодичности по переменной y на отрезке $[0,2\pi N]$, т.е. будем считать, что $f_N(x,y) = f_N(x,y+2\pi k)$ при $0 \leq y \leq 2\pi$ и $k=1,\ldots,N-1$. Вставляя, если нужно, лишние звенья длины 2π по переменной y, мы можем считать, что (10.9) имеет вид

$$N\iint_{\Omega_0} \frac{|f|^2 dx\,dy}{R^2_{\Pi(q)}(z)} \leq N\iint_{\Omega_0} |\nabla f|^2 dx\,dy + A, \tag{10.10}$$

где N – любое натуральное число, Ω_0 – прямоугольник $[\log q, 0]\times[0,2\pi]$, A – величина, не зависящая от N, функция f удовлетворяет граничным условиям: $f(x,0) = f(x,2\pi)$, $f(x,y)=0$ на $\partial\Pi(q)$. Деля обе части (10.10) на N и переходя к пределу при $N \to +\infty$, получаем

$$\iint_{\Omega_0} \frac{|f|^2 dx\,dy}{R^2_{\Pi(q)}(z)} \leq \iint_{\Omega_0} |\nabla f|^2 dx\,dy. \tag{10.11}$$

Функция $w = e^z$ дает универсальное накрытие кольца $K = \{w : q < |w| < 1\}$ полосой $\Pi(q)$. При этом образом открытого прямоугольника $\Omega_0 \backslash \partial\Omega_0$ является кольцо K без отрезка $[q, 1]$. В силу конформной инвариантности метрики Пуанкаре

$$\frac{|dw|}{R\,(w, K)} = \frac{|dz|}{R_{\Pi(q)}\,(z)},$$

неравенство (10.11) принимает вид

$$\iint\limits_K \frac{|F|^2 du\, dv}{R^2\,(w, K)} \le \iint\limits_K |\nabla F|^2 du\, dv, \quad \forall F \in C_0^\infty\,(K)\,,$$

где $w = u + iv$, $F\,(w) = F\,(e^z) = f\,(z)$ для любого $w \in K$.

Снова пользуясь конформной инвариантностью и учитывая произвольность q, получаем, что вариационное неравенство для K верно и при замене K на произвольную двусвязную область Ω_2 гиперболического типа. Этим и завершается доказательство леммы.

Нам также потребуются следующая числовая характеристика области

$$\gamma(\Omega) := \sup_{z \in \Omega} \left|\nabla \lambda_\Omega^{-1}(z)\right|$$

и известная постоянная

$$a_0 = \frac{1}{2\lambda_{\mathbb{C}\setminus\{0,1\}}(-1)} = \frac{\Gamma^4\,(1/4)}{4\pi^2} = 4,3768796...,$$

использованная Дж. А. Хемпелем [27] и Дж. А. Дженкинсом [30] для установления точной формы теоремы Ландау об оценке $|F'(0)|$ для функции F, голоморфной в единичном круге и не принимающей значений 0 и 1.

Теорема 10.5. (Ф. Г. Авхадиев [16]). *Пусть Ω – двусвязная область на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, имеющая более одной граничной точки в $\mathbb{C}$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) если $\Omega = A = \{z \in \mathbb{C} : r(A) < |z - z_0| < R(A)\}$ – круговое кольцо, то

$$\iint\limits_A \frac{|f|^2}{\operatorname{dist}^2\,(z, \partial\Omega)} dx\, dy \le \left(4 + \frac{4}{\pi^2} \ln^2\ \frac{R(a)}{r(a)}\right)\ \iint\limits_A |\nabla f|^2 dx\, dy \quad \forall f \in C_0^\infty\,(A)\,;$$

2) если Ω – двусвязная область на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, которая не содержит никакой окружности, имеющей в качестве центра граничную точку этой области, то

$$\iint\limits_\Omega \frac{|f|^2}{\operatorname{dist}^2\,(z, \partial\Omega)} dx\, dy \le \frac{\Gamma^8(1/4)}{4\pi^4} \iint\limits_\Omega |\nabla f|^2 dx\, dy \ \ \forall f \in C_0^\infty\,(\Omega)\,;$$

3) если Ω – произвольная двусвязная область на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ с равномерно совершенной границей и с максимальным модулем $M_0(\Omega)$, то

$$\iint\limits_{\Omega} \frac{|f|^2}{\operatorname{dist}^2(z,\partial\Omega)} dx\,dy \leq$$

$$\leq 4\left(\pi M_0(\Omega) + \frac{\Gamma^4(1/4)}{4\pi^2}\right)^2 \iint\limits_{\Omega} |\nabla f|^2 dx\,dy \quad \forall f \in C_0^\infty(\Omega).$$

Доказательство пункта 1). Для произвольно взятой точки $z \in A$ через $\zeta \in \partial A$ обозначим ближайшую к ней точку, взятую на границе кольца. Интегрируя вдоль отрезка $[\zeta, z]$ с учетом соотношений $R(\zeta, A) = 0$ и $|\zeta - z| = \operatorname{dist}(z, \partial A)$, получаем

$$R(z,A) = \int_0^{|\zeta - z|} \frac{dR(\zeta + se^{i\theta}, A)}{ds}\,ds \leq \gamma(A)\,|\zeta - z| = \gamma(A)\operatorname{dist}(z,\partial A).$$

Поэтому неравенство (10.8) леммы 10.1 при $u = f(x,y)$ влечет неравенство

$$\iint\limits_{A} \frac{|f|^2}{\operatorname{dist}^2(z,\partial\Omega)} dx\,dy \leq \gamma^2(A) \iint\limits_{A} |\nabla f|^2 dx\,dy \qquad \forall f \in C_0^\infty(A).$$

Согласно формуле

$$\gamma^2(A) = 4 + 16\,M^2(A) = 4 + \frac{4}{\pi^2}\ln^2\frac{r(A)}{R(A)},$$

доказанной в [20], с. 43 (см. также упражнение 2 конце этой главы), мы можем выразить характеристику $\gamma(A)$ через модуль кольца и получить доказываемое неравенство пункта 1 теоремы.

Доказательство пункта 3). А. Е. Бирдон и Х. Поммеренке [22] доказали, что для любой области гиперболического типа

$$\frac{1}{2\lambda_\Omega(z)\operatorname{dist}(z,\partial\Omega)} \leq \pi M_0(\Omega) + a_0, \quad z \in \Omega,$$

где a_0 – постоянная из теоремы Ландау. Точное значение этой постоянной стало известно позже, и мы привели ее перед формулировкой теоремы. Таким образом, справедлива оценка

$$\frac{1}{\operatorname{dist}^2(z,\partial\Omega)} \leq \left(2\pi M_0(\Omega) + \frac{\Gamma^4(1/4)}{2\pi^2}\right)^2 \lambda_\Omega^2(z), \quad z \in \Omega. \tag{10.12}$$

Эти оценки в сочетании с леммой 10.1, примененной к функции $u = f(x, y)$, непосредственно ведут к утверждениям пункта 3) нашей теоремы.

Доказательство пункта 2). Очевидно, пункт 2) является прямым следствием пункта 3), соответствующим случаю $M_0(\Omega_2) = 0$.

Теорема доказана полностью.

Если число граничных компонент области $m \geq 3$, то неравенство (10.8) является, вообще говоря, неверным. Например, для $\Omega_3 = \mathbb{C} \setminus \{0, 1\} = \overline{\mathbb{C}} \setminus \{0, 1, \infty\}$ формула не имеет места, даже если мы умножим правую часть (10.8) на сколь угодно большое, но не зависящее от пробной функции, число, т. е. имеет место соотношение

$$\sup_{u \in C_0^\infty(\Omega_3)} \frac{\iint_{\Omega_3} |u(x,y)|^2 \lambda_{\Omega_3}^2(z)\ dx\, dy}{\iint_{\Omega_3} |\nabla u(x,y)|^2\, dx\, dy} = \infty.$$

Тем не менее, для областей связности 3 и более аналог предыдущей теоремы будет справедлив, но с иными оценками для констант Харди через максимальный модуль рассматриваемой области.

Теорема 10.6. (Ф. Г. Авхадиев [16]). *Пусть Ω – произвольная область на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, имеющая более одной граничной точки в $\mathbb{C}$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) если область Ω не содержит никакой окружности, имеющей в качестве центра граничную точку этой области, то имеет место следующее неравенство Харди

$$\iint\limits_{\Omega} \frac{|f|^2}{\operatorname{dist}^2(z, \partial\Omega)} dx\, dy \leq \frac{\Gamma^{16}(1/4)}{16\pi^8} \iint\limits_{\Omega} |\nabla f|^2 dx\, dy \quad \forall f \in C_0^\infty(\Omega)\,;$$

2) в общем случае справедливо следующее неравенство

$$\iint\limits_{\Omega} \frac{|f|^2}{\operatorname{dist}^2(z, \partial\Omega)} dx\, dy \leq$$

$$\leq 16 \left(\pi M_0(\Omega) + \frac{\Gamma^4(1/4)}{4\pi^2} \right)^4 \iint\limits_{\Omega} |\nabla f|^2 dx\, dy \quad \forall f \in C_0^\infty(\Omega)\,.$$

Доказательство. Отметим сразу же, что пункт 1) является прямым следствием пункта 2), соответствующим случаю $M_0(\Omega) = 0$.

При доказательстве пункта 2) естественно считать, что $M_0(\Omega) < \infty$. Пусть λ_Ω – плотность метрики Пуанкаре в Ω с кривизной -4.

Пусть $f \in C_0^\infty(\Omega)$, тогда $|f|^2 \in C_0^1(\Omega)$ и $|\nabla|f|^2| = 2|f||\nabla f|$. Пользуясь уравнением Лиувилля

$$\frac{\Delta \log \lambda_\Omega(z)^{-1}}{\lambda_\Omega(z)^2} = -4, \ z = x+iy \in \Omega,$$

и формулой Грина

$$\iint_\Omega [u\Delta v + (\nabla u, \nabla v)]dx\,dy = 0$$

для $v = \log \lambda_\Omega^{-1}$ и $u = |f|^2, f \in C_0^\infty(\Omega)$, получаем

$$4\iint_\Omega |f(z)|^2 \ \lambda_\Omega^2(z)dx\,dy = 2\iint_\Omega |f(z)| \ \lambda_\Omega(z) \ (\nabla|f(z)|, \nabla\lambda_\Omega^{-1}(z)) \ dx\,dy.$$

Комбинируя это соотношение с неравенством Коши-Буняковского-Шварца

$$\left(\iint_\Omega |f(z)| \ \lambda_\Omega(z) \ |(\nabla|f(z)|, \nabla\lambda_\Omega^{-1}(z))| \ dx\,dy\right)^2 \leq$$

$$\leq \left(\iint_\Omega |f(z)|^2 \ \lambda_\Omega^2(z) \ dx\,dy\right) \iint_\Omega \lambda_\Omega(z)| \ (\nabla f(z), \nabla\lambda_\Omega^{-1}(z))|^2 \ dx\,dy,$$

непосредственно получаем

$$\iint_\Omega |f(z)|^2 \ \lambda_\Omega^2(z) \ dx\,dy \leq \frac{1}{4}\iint_\Omega |\,(\nabla f(z), \nabla\lambda_\Omega^{-1}(z))|^2 \ dx\,dy \tag{10.13}$$

для любой функции $f \in C_0^\infty(\Omega)$.

Пользуясь (10.13) и следующим неравенством Осгуда [33]

$$\lambda_\Omega(z)|\nabla\lambda_\Omega^{-1}(z)| \leq \frac{2}{\operatorname{dist}(z, \partial\Omega)}, \ z = x+iy \in \Omega,$$

приходим к соотношению

$$\iint_\Omega |f(z)|^2\lambda_\Omega^2(z) \ dx\,dy \leq \iint_\Omega \frac{\lambda_\Omega^{-2}(z)|\nabla f(z)|^2}{\operatorname{dist}^2(z, \partial\Omega)} \ dx\,dy.$$

Следовательно, для любой функции $f \in C_0^\infty(\Omega)$ имеет место неравенство

$$\alpha(\Omega)^2\iint_\Omega \frac{|f(z)|^2}{\operatorname{dist}^2(z, \partial\Omega)} \ dx\,dy \leq \frac{1}{\alpha(\Omega)^2}\iint_\Omega |\nabla f(z)|^2 \ dx\,dy,$$

или, что то же самое, неравенство

$$\iint_\Omega \frac{|f(z)|^2}{\operatorname{dist}^2(z, \partial\Omega)} \ dx\,dy \leq \frac{1}{\alpha(\Omega)^4}\iint_\Omega |\nabla f(z)|^2 \ dx\,dy, \tag{10.14}$$

где

$$\alpha(\Omega) := \inf\{\lambda_\Omega(z)\operatorname{dist}(z, \partial\Omega) : z \in \Omega\}.$$

Применяя далее уточненную версию (10.12) оценки А. Е. Бирдона и Х. Поммеренке, получаем утверждения теоремы.

10.4 Исторические сведения и комментарии

Полное описание плоских областей, для которых справедливо неравенство Харди с конечной постоянной, возникло на протяжении десятилетия в 70-е и 80-е годы XX века, как объединяющий результат достижений ряда математиков, а именно, классических и современных достижений по изучению метрики Пуанкаре для произвольных областей и завершающих шагов, появившихся в статьях А. Е. Бирдона и Х. Поммеренке [22] (1978 г.), Х. Поммеренке [35] (1979 г.), В. К. Хеймана и Дж. М. Г. Ву [28] (1981 г.), А. Анконы [15] (1986 г.), Й. Л. Фернандеса [26] (1989 г.) и других математиков.

Критерий таков: существование конечной постоянной $C(\Omega)$ эквивалентно неравенству

$$\alpha(\Omega) := \inf_{z\in\Omega} \operatorname{dist}(z, \partial\Omega)\, \lambda_\Omega(z) > 0,$$

где $\lambda_\Omega(z)$ — коэффициент гиперболической метрики области Ω в точке z.

Отметим для специалистов, что до 1989 года развивались параллельно и независимо друг от друга два направления: исследования свойств областей, для которых a) существует конечная постоянная Харди и b) коэффициент гиперболической метрики обладает свойством $\alpha(\Omega) > 0$. Эквивалентность двух условий $\alpha(\Omega) > 0$ и $C(\Omega) < \infty$ установлена в статье Й. Л. Фернандеса [26] путем их сравнения с критерием А. Анконы [15] существования конечной постоянной $C(\Omega)$ в терминах свойств гармонических мер порций границы области.

Критерий Анконы представляет несомненный теоретический интерес, но весьма сложен для проверки. Понятно также, что и проверка условия $\alpha(\Omega) > 0$ в общем случае вряд ли проще, чем доказательство существования конечной постоянной $C(\Omega)$ в неравенстве Харди. Но методы и результаты геометрической теории функций комплексного переменного позволяют эффективно "геометризовать" условие $\alpha(\Omega) > 0$.

В терминах гиперболической геометрии критерием выполнения свойства $\alpha(\Omega) > 0$ является равномерная ограниченность модулей всех двусвязных областей, лежащих в Ω и разделяющих ее граничные компоненты, т. е. условие $M(\Omega) < \infty$.

А в терминах евклидовой геометрии оказывается, что условие $\alpha(\Omega) > 0$ выполняется тогда и только тогда, когда $M_0(\Omega) < \infty$, т. е. область $\Omega \subset \mathbb{C}$ имеет не менее трех граничных точек на расширенной плоскости, и кроме того, обладает одним из следующих свойств:

P_1) область Ω является либо односвязной, либо имеет несколько граничных компонент, но не существует окружности, лежащей в этой области и разделяющей ее граничные компоненты;

P_2) область Ω является многосвязной и существуют окружности, лежащие в этой области и разделяющие ее граничные компоненты, но при этом является конечной величиной следующий *максимальный модуль*

$$M_0(\Omega) := \sup \frac{1}{2\pi} \ln \frac{R(A)}{r(A)},$$

где супремум берется по всем круговым концентрическим кольцам $A = \{z \in \mathbb{C} : r(A) < |z - z_0| < R(A)\}$, разделяющим компоненты $\partial\Omega$, а именно, по кольцам таким, что $A \subset \Omega, \quad z_0 \in \partial\Omega$.

Отметим также, что термин "равномерно совершенный" (uniformly perfect) введен Х. Поммеренке в его статье [35]. Им дано следующее определение.

Расположенный на римановой сфере компакт E, содержащий бесконечно удаленную точку, называется равномерно совершенным, если существует постоянная $c \in (0,1)$ такая, что для любой точки $z_0 \in E \setminus \{\infty\}$ и любого $r \in (0,\infty)$ множество $E \cap \{z \in \mathbb{C} : cr < |z - z_0| < r\}$ не пусто.

Обозначив через $c_0(E)$ супремум допустимых констант $c \in (0,1)$ в этом определении, получаем

$$\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{c_0(E)} = M_0(\Omega), \quad \Omega = \overline{\mathbb{C}} \setminus E.$$

Переходя к неравенствам Харди, отметим, что наш выбор $M_0(\Omega)$ в качестве характеристики для равномерно совершенных граничных множеств объясняется простотой этого параметра. Для вычисления или оценки $M_0(\Omega)$ не нужны конформные отображения, гиперболические характеристики области или свойства гармонических мер.

В главе 10 приведена с доказательством оценка $C(\Omega) \leq 16$ для односвязных областей, полученная в статье А. Анконы [15]. Для многосвязных областей в статьях [15] и [26] обоснованы лишь результаты качественного характера, и методы этих работ, по-видимому, не позволяют получить явные оценки для константы Харди. Поэтому в случае многосвязных областей мы привели с доказательствами явные двусторонние оценки константы Харди $C(\Omega)$ через максимальный модуль $M_0(\Omega)$, полученные в статье автора [16].

Теорема 10.2 играет двоякую роль. Она показывает, во-первых, что существуют неравенства типа Харди, для которых "хорошими" оказываются все области. Во-вторых, ограничение $2 < s < \infty$ в этой теореме связано с существенной зависимостью неравенств Харди от размерности областей, как это видно из следующей, полной версии теоремы 10.2, доказанной также в статье [16]:

пусть Ω – открытое собственное подмножество $\mathbb{R}^n$, $\delta = \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$, и пусть $1 \le p < \infty$. Если $n < s < \infty$, то имеет место неравенство

$$\int_\Omega \frac{|f|^p}{\delta^s} dx \le \left(\frac{p}{s-n}\right)^p \int_\Omega \frac{|\nabla f|^p}{\delta^{s-p}} dx \quad \forall f \in C_0^\infty(\Omega).$$

Существуют области, для которых постоянная $(p/(s-n))^p$ не может быть уменьшена.

10.5 Задачи и упражнения

1) Пусть A – круговое концентрическое кольцо с модулем $M(A)$. Методами элементарной математики докажите следующие утверждения:

$M_0(A) = 0$, если $M(A) \le (2\pi)^{-1} \ln 3$;

если же $M(A) > (2\pi)^{-1} \ln 3$, то

$$M_0(A) = M(A) - \frac{1}{2\pi} \ln 3.$$

Указание. Без рисунка не обойтись.

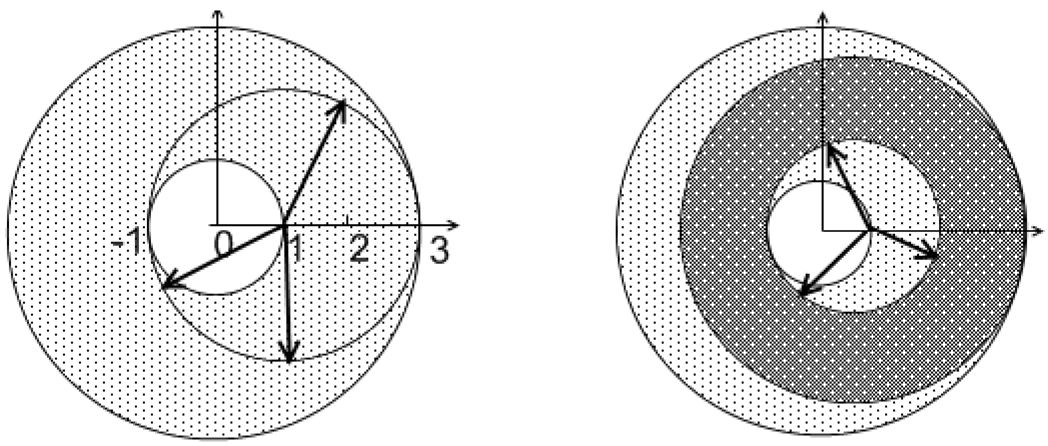

Рис. 10.3: Центр вложенного кольца – граничная точка большого кольца

2) Пусть A – круговое концентрическое кольцо с модулем $M(A)$. Докажите формулу

$$\frac{\gamma^2(A)}{16} = \frac{1}{4} + M^2(A),$$

использованную при доказательстве пункта 1) теоремы 10.5.

Указание. Рассматриваемые величины инвариантны при линейных преобразованиях. Поэтому достаточно взять кольцо с центром в начале координат и с радиусами $\varepsilon \in (0,1)$ и 1. Тогда

$$\frac{1}{\lambda_A(z)} = 4M\,|z|\,\sin\left(\frac{\ln(1/|z|)}{2M}\right),$$

где

$$M := M(A) = \frac{1}{2\pi}\,\ln(1/\varepsilon).$$

Поэтому

$$|\nabla\lambda_A^{-1}(z)| = \left|\frac{d\lambda_A^{-1}(z)}{d|z|}\right| = |g(t)|,$$

где

$$t = \frac{\ln(1/|z|)}{2M} \in (0,\pi), \quad g(t) = 4M\,\sin t - 2\,\cos t.$$

Простые вычисления показывают, что максимум $|g(t)|$ достигается в некоторой точке $t_0 \in (\pi/2,\pi)$, определяемой равенством $\operatorname{tg} t_0 = -2M$, и поэтому

$$\gamma(A) = |g(t_0)| = 2\sqrt{1+4M^2}.$$

3) Для заданного положительного числа C постройте примеры трехсвязных областей Ω_3, удовлетворяющих условию $M_0(\Omega_3) = C$.

4) Докажите следующее утверждение.

Пусть $1 \le p < \infty$, и пусть Ω – односвязная или двусвязная область гиперболического типа на расширенной комплексной плоскости. Тогда справедливо неравенство

$$\iint_\Omega |u(z)|^p\,\lambda_\Omega^2(z)\;dx\,dy \le \left(\frac{p}{2}\right)^p \iint_\Omega |\,\nabla u(z)|^p\,\lambda_\Omega^{2-p}(z)\;dx\,dy \;\;\forall u \in C_0^\infty(\Omega)\,.$$

Указание. В силу конформной инвариантности неравенство достаточно доказать для полуплоскости и для кругового концентрического кольца.

Для полуплоскости требуемое неравенство можно получить как следствие результата Харди. А именно, полагая $s = 2$ и $f(t) = |u(t,y)|$ ($u \in C_0^\infty(\Pi)$) в неравенстве Харди (10.3), имеем

$$\int_0^\infty \frac{|u(t,y)|^p}{t^2}dt \le p^p \int_0^\infty \left|\frac{\partial u(t,y)}{\partial t}\right|^p t^{p-2}\,dt \le p^p \int_0^\infty |\nabla u(t,y)|^p\,t^{p-2}\,dt,$$

следовательно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{0}^{\infty} \frac{|u(x,y)|^p}{(2x)^2}\, dx \le \left(\frac{p}{2}\right)^p \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{0}^{\infty} |\nabla u(x,y)|^p\, (2x)^{p-2}\, dx.$$

Остается заметить, что $2x = \lambda_{\Pi}^{-1}(x+iy)$ для полуплоскости П. Таким образом, утверждение будет доказано для любой односвязной области гиперболического типа.

Переход к двусвязным областям можно провести по схеме доказательства неравенства (10.8) в лемме 10.1.

5) Пусть $\Omega_3 = \mathbb{C} \setminus \{0,1\} = \overline{\mathbb{C}} \setminus \{0,1,\infty\}$. Докажите соотношение

$$\sup_{u \in C_0^\infty(\Omega_3)} \frac{\iint_{\Omega_3} |u(x,y)|^2 \lambda_{\Omega_3}^2(z)\ dx\, dy}{\iint_{\Omega_3} |\nabla u(x,y)|^2\, dx\, dy} = \infty,$$

приведенное без доказательства перед заключительной теоремой.

6) Постройте примеры бесконечносвязных областей, обобщающих описанные выше примеры 1-3, для которых максимальные модули $M_0(\Omega)$ или $M_1(\Omega)$ можно вычислить точно.

7) На стр.119 и стр. 343-345 монографии Дж. Б. Гарнета и Д. Е. Маршалла по гармоническим мерам [25] можно найти более 10 критериев равномерной совершенности множества $\partial\Omega$, или, что то же самое, более 10 нетривиально эквивалентных определений понятия равномерной совершенности $\partial\Omega$. Среди критериев, приведенных в этой книге, отсутствуют два следующих:

$$M_0(\Omega) < \infty$$

и

$$\gamma(\Omega) < \infty,$$

т. е. отсутствуют именно те характеристики, которые были существенно использованы нами для явных оценок констант Харди в доказательствах теорем 10.5, 10.6.

7.1) Убедитесь путем построения примеров, что условие $M_0(\Omega) < \infty$ является наиболее простым для проверки из всех критериев равномерной совершенности, приведенных в работах [28], [31], [25].

7.2) Докажите, что свойство равномерной совершенности границы области является конформно инвариантным.

Указание к упражнению 7.2). Конформно инвариантной является характеристика $M(\Omega)$, поскольку модули двух конформно эквивалентных двусвязных областей равны по определению.

7.3) Пусть Ω и Ω' – конформно эквивалентные области с равномерно совершенными границами. Докажите, что

$$|M_0(\Omega) - M_0(\Omega')| \leq \frac{1}{2}.$$

Отметим в заключение, что имеются некоторые попытки распространения теории областей с равномерно совершенными границами на пространственный случай (см., например, [29], [3], [16]).

Литература

[1] Ф. Г. Авхадиев. *Конформные отображения и краевые задачи.* Казань: Изд-во Казанск. ун-та. 1996, 216 стр.

[2] Ф. Г. Авхадиев, Л. А. Аксентьев. *Основные результаты в достаточных условиях однолистности аналитических функций.* Успехи матем. наук, 1975. т. 30. № 4(184), 3 – 63.

[3] Ф. Г. Авхадиев. *Неравенства для интегральных характеристик областей.* Учебное пособие. Казань: Изд-во Казанск. ун-та. 2006, 141 стр.

[4] И. А. Александров, И. М. Милин. *О гипотезе Бибербаха и логарифмических коэффициентах однолистных функций.* Изв. вузов. Матем., 1989. № 8, 3 – 15.

[5] Л. Альфорс. *Лекции по квазиконформным отображениям.* Москва: Мир. 1969, 132 стр.

[6] Ф. Д. Гахов. *Краевые задачи.* Москва: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. 1977, 640 стр.

[7] Г. М. Голузин. *Геометрическая теория функций комплексного переменного.* Москва: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. 1965, 628 стр.

[8] В. Н. Дубинин. *Симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного.* Успехи матем. наук, 1994. т. 49. № 1(295), 3 – 76.

[9] Г. Полиа, Г. Сегё. *Изопериметрические неравенства математической физики.* Москва: Физматгиз. 1962, 336 стр.

[10] Ю. Г. Решетняк. *Пространственные отображения с ограниченным искажением.* Новосибирск: Наука. 1982, 285 стр.

[11] Е. Титчмарш. *Теория функций.* Москва: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. 1980, 464 стр.

[12] Г. Г. Тумашев, М. Т. Нужин. *Обратные краевые задачи.* Казань: Изд-во Казанск. ун-та. 1965, 333 стр.

[13] Г. Г. Харди, Дж. Е. Литтльвуд и Г. Полиа. *Неравенства.* (С дополнениями В. И. Левина и С. Б. Стечкина.) М.: ИЛ, 1948, 456 стр.

[14] D. A. Abramov, F. G. Avkhadiev, D. Kh. Giniyatova. *Versions of the Schwarz lemma for domain moments and the torsional rigidity.* Lobachevskii J. Math., 2011, 32, no. 2, 149 – 158.

[15] A. Ancona. *On strong barriers and an inequality of Hardy for domains in* $\mathbb{R}^n$. J. London Math. Soc., 1986, (2) 37, 274 – 290.

[16] F. G. Avkhadiev. *Hardy type inequalities in higher dimensions with explicit estimate of constants.* Lobachevskii J. Math., 2006, 21, 3 – 31.

[17] F. G. Avkhadiev, I. R. Kayumov. *Comparison theorem of isoperimetric type for moments of compact sets.* Collectanea Math., 2004, 55 No.1, 1 – 9.

[18] F. G. Avkhadiev, R. G. Salahudinov. *Isoperimetric Inequalities for Conformal Moments of Plane Domains.* J. of Inequal. Appl., 2002, 7(4), 593 – 601.

[19] F. G. Avkhadiev, K.-J. Wirths. *The conformal radius as a function and its gradient image.* Israel J. Math., 2005, 145, 349 – 374.

[20] F. G. Avkhadiev, K.-J. Wirths. *Schwarz-Pick Type Inequalities.* Basel - Boston - Berlin: Birkhäuser Verlag, 2009, 156 pp.

[21] C. Bandle. *Isoperimetric Inequalities and Applications.* Pitman Monographs and Studies in Mathematics, v. 7, Boston, 1980, 228 pp.

[22] A. E. Beardon, Ch. Pommerenke. *The Poincaré metric of plane domains.* J. London Math. Soc., 1978, (2) 18, 475 – 483.

[23] E. B. Davies *A Review of Hardy Inequalities.* The Maz'ya anniversary Collection. Vol. 2. Oper. Theory Adv. Appl., 1999, Vol. 110, 55 – 67.

[24] P. L. Duren *Univalent functions.* Springer, New York, 1980, 382 pp.

[25] J. B. Garnett, D. E. Marshall. *Harmonic Measure*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2005, 588 pp.

[26] J. L. Fernández. *Domains with Strong Barrier.* Revista Matematica Iberoamericana, 1989, 5, 47 – 65.

[27] J. A. Hempel. *The Poincaré metric on the twice punctured plane and the theorems of Landau and Schottky.* J. London Math. Soc., 1979, (2) 20, 435 – 445.

[28] W. K. Hayman, J. M. G. Wu. *Level sets of univalent functions.* Comment. Math. Helv., 1981, 56, no. 3, 366 – 403.

[29] P. Järvi, M. Vuorinen. *Uniformly perfect sets and quasiregular mappings.* J. London Math. Soc., 1996, (2) 54, 515 – 529.

[30] J. A. Jenkins. *On explicit bounds in Landau's Theorem II.* Can. J. Math., 1981, 33, 559 – 562.

[31] W. Ma, D. Minda. *Behavior of domain constants under conformal mappings.* Israel J. Math., 1995, 91, 157 – 171.

[32] V. M. Miklyukov, M. R. Vuorinen. *Hardy's inequality for $W_0^{1,p}$- functions on Riemannian manifolds.* Proc. Amer. Math. Soc., 1999, 127, No.9 , 2145 – 2154.

[33] B. Osgood. *Some properties of f''/f' and the Poincaré metric.* Indiana University Math., 1982, J. 31, 449 – 461.

[34] Ch. Pommerenke. *Univalent functions.* Vandenhoeck and Ruprecht, Göttingen, 1975, 382 pp.

[35] Ch. Pommerenke. *Uniformly perfect sets and the Poincaré metric.* Arch. Math., 1979, 32, 192 – 199.

[36] R. G. Salahudinov. *Isoperimetric Inequality for Torsional Rigidity in the Complex Plane.* J. of Inequal. Appl., 2001, 6(4), 253 – 260.